

# Перспективное Построение Отражений Объектов в Криволинейных Зеркальных Поверхностях

Николай М. Бородин, доцент каф. «Черчения, труда и методики»  
Евгений В. Артемов, учитель черчения  
Липецкий Государственный Педагогический Университет  
Липецк, Россия

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье анализируются результаты исследований о перспективном изображении объектов в криволинейных зеркальных поверхностях, полученных на кафедре «Черчения Труда и Методики» Липецкого Государственного Педагогического Университета.

## 2. ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Анализируя картины старых мастеров и современных художников приходим к выводу, что изображение отражений предметов быта в криволинейных зеркальных поверхностях (самоварах, чайниках, фаянсовой посуде и т.п.) выполнено не по законам линейной перспективы, а скорее всего из прямых наблюдений композиционного расположения объектов по отношению к криволинейной зеркальной поверхности. Поэтому возникла необходимость теоретически обосновать способы изображения отражений в криволинейных зеркальных поверхностях и экспериментально подтвердить обоснованность теоретических расчетов.

Под понятием «криволинейная зеркальная поверхность» мы подразумеваем все криволинейные поверхности линейчатого или нелинейчатого типа с зеркальным отражающим покрытием: прямые и наклонные цилиндры и конусы, сферы, торовые поверхности, поверхности вращения и т.д. В дальнейшем понятие «криволинейная зеркальная поверхность» для краткости заменим на понятие «кривое зеркало».

## 3. МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ ОТРАЖЕНИЙ В ПЕРДМЕТНО-ПРОЕЦИРУЮЩЕМ ЦИЛИНДРЕ ВРЕЩЕНИЯ

Цилиндрическое зеркало имеет двойные свойства. В одном направлении, это свойства сферического зеркала, а в другом - плоского. Если в выпуклом сферическом зеркале расстояние от зеркала до предмета больше, чем расстояние от зеркала до его отражения, то в цилиндрическом это расстояние одинаково благодаря вмешательству свойств плоского зеркала. То есть в направлении, параллельном оси вращения цилиндра, пропорции длин сохраняются, а в направлении, перпендикулярном оси вращения размеры изменяются. Кроме того, отражения прямых - кривые линии. В случае вогнутого зеркала при предмете, удалённом от зеркала на расстояние, меньшее половины его диаметра, размеры в направлении, перпендикулярном оси вращения, увеличиваются. Если же предмет удалён от зеркала на расстояние, большее половины диаметра, то размеры в этом направлении уменьшаются.

Анализируя свойства цилиндрического зеркала, мы будем мысленно заменять его на катящееся по поверхности

цилиндра касательное плоское зеркало, которое в каждый момент движения представлено прямой линией касания. Это можно доказать, построив отражение точки на эмпоре Монжа.

Дано: горизонтально - проецирующий цилиндр  $Z$  и точка  $A$  (рис 1).

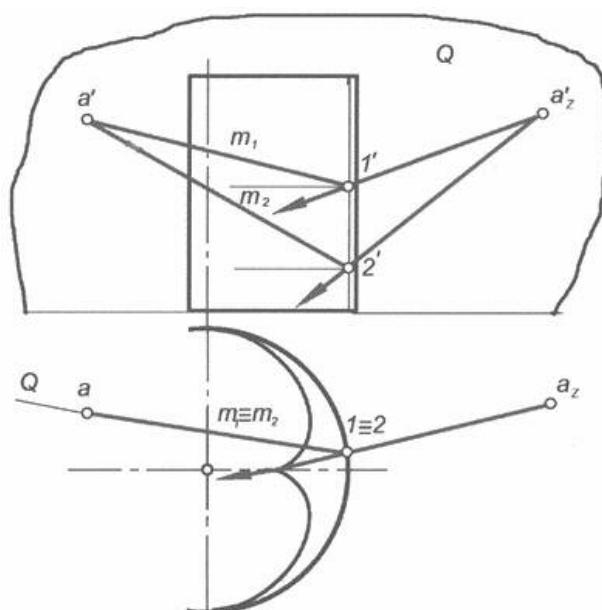


Рис. 1

1. Проведём через точку  $A$  лучи  $m_1$  и  $m_2$ , лежащие в горизонтально-проецирующей плоскости  $Q$ , до пересечения с цилиндрической поверхностью в точках  $1$  и  $2$ .
2. Через точки пересечения проведём горизонтальные плоскости, в которых построим нормали к точкам падения лучей.
3. Пользуясь свойством сохранения пропорций углов, отложим на горизонтальной и фронтальной проекциях углы  $\alpha_1 = \gamma_1$ ,  $\alpha_2 = \gamma_2$ .
4. Продлив отражённые лучи за зеркальную плоскость, мы получим отражение точки  $A$  -  $A_z$ . Мы видим, что расстояние от точки  $A$  до зеркала равно расстоянию от зеркала до отражения этой точки (на горизонтальной проекции) ( $A_z$ ). Однако если мы построим третий луч  $n$  не принадлежащий плоскости  $Q$  (рис.2), то его отражение  $n_z$  будет скрещиваться с лучами  $m_1$  и  $m_2$ . Таким образом, множество лучей, проходящих через точку  $A$ , образуют цилиндрическую поверхность, образующей которой является линия  $l$ . Если через точку проводить лучи и находить места их пересечения, то получится бесчисленное множество отражений, причём пересекаются только лучи, лежащие в горизонтально - проецирующих плоскостях.

Как же всё-таки получить отражение точки?  
 Оптика рассматривает отражение без учёта зрительного восприятия, мы же добавим в этот чертёж точку зрения S рис.3, представив глаз человека как камеру - обскуру. Чем

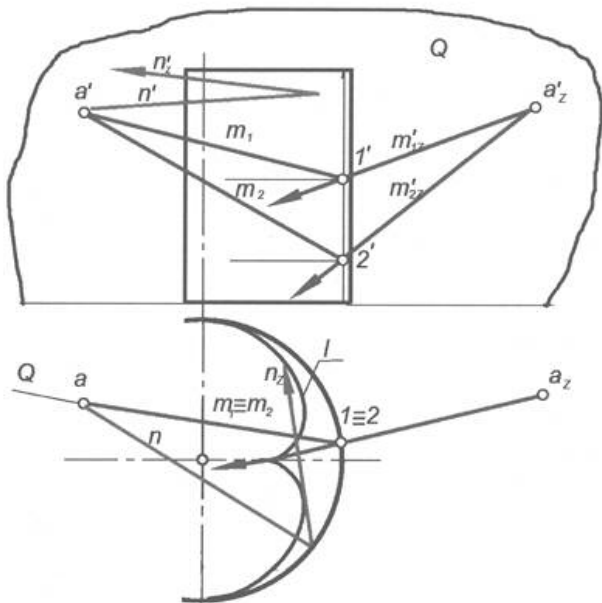


Рис. 2

меньше попадает лучей из точки Az, тем резче изображение на сетчатке. Пусть из точки A исходит пучок лучей, отражающихся от зеркала Z и попадающих в глаз. Если поставить условием стремление числа лучей к одному, то угол между лучами с вершиной в точке A будет стремиться к нулю. Следовательно, область пересечения отражённых лучей будет отдаляться от зеркала. Но, благодаря свойству плоского зеркала, в вертикальном сечении цилиндра расстояние от точки до зеркала и от зеркала до отражения этой точки будет сохраняться равным.

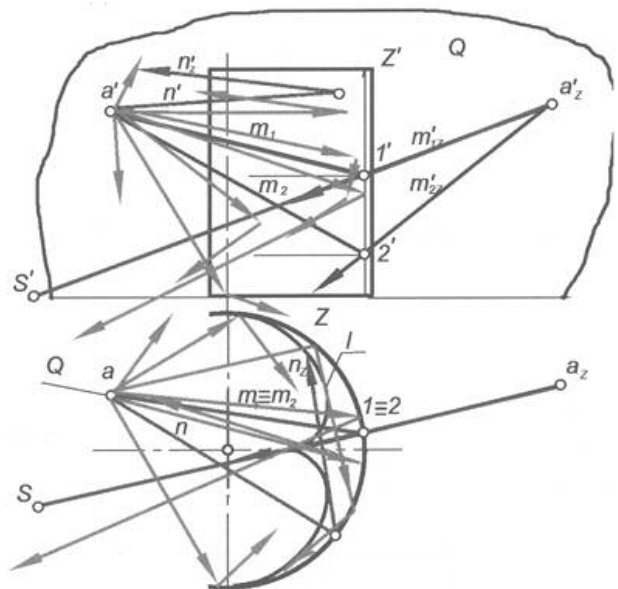


Рис. 3

Возьмём другую точку зрения S<sub>1</sub> (рис.4). Для построения отражения точки, исходя из вышеизложенного, достаточно построить отражение одного луча и отложить на нём расстояние, равное расстоянию от точки A до зеркала Z.

Таким образом, получится второе отражение точки A – A<sub>1z</sub>. Из этого сделаем выводы:

1. Положение отражения точки в кривом зеркале, представленном поверхностью цилиндра вращения, зависит от точки зрения.
2. Глаз воспринимает минимальное число лучей, стремящихся к одному (центральному), поэтому расстояние от зеркала до отражения точки определяется свойствами плоского зеркала в направлении, параллельном оси вращения цилиндра.
3. Для построения отражения точки достаточно на продолжении отражённого луча за зеркальной плоскостью отложить расстояние от точки падения, равное длине отрезка между данной точкой и точкой падения. Глаз человека воспринимает только мнимое отражение. Поэтому эти правила действительны как для выпуклого так и для вогнутого зеркала. В перспективе удобнее всего строить отражение методами Дюрера и гомологии.

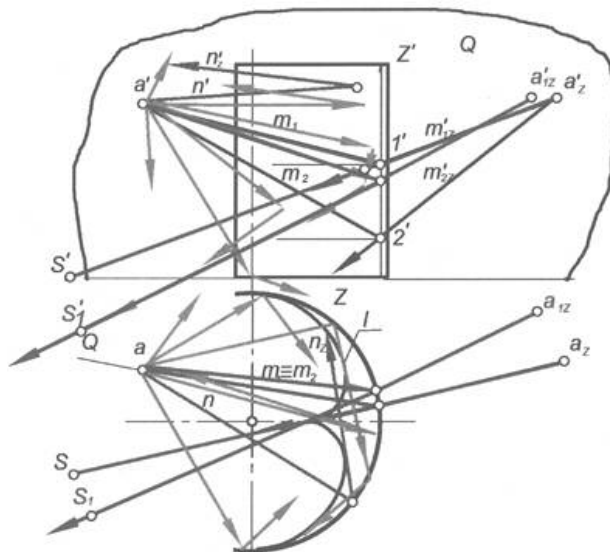


Рис. 4

### 3.1 ПОСТРОЕНИЕ ОТРАЖЕНИЙ «МЕТОДОМ ДЮРЕРА»

Для построения отражений не обязательно находить расстояние от зеркала до отражения: перспектива в своей основе берёт один глаз, то есть монокулярное зрение, и проецирующие лучи попадающие на картинную плоскость оставляют точечный след, следовательно, отмерять расстояние на проецирующих лучах не имеет смысла.

В жизни мы определяем расстояние до предмета с помощью бинокулярного аппарата. На двухмерном листе невозможно отобразить сразу две зрительных проекции (за исключением специальных стереоскопических методов), поэтому в линейной перспективе приняты вторичные проекции на предметную плоскость, называемые основаниями точек.

Для построения отражения «методом Дюрера» достаточно проследить ход лучей: точка => зеркало => картинная плоскость => глаз, как для самих точек, так и для их основания.

Рассмотрим пример. Для облегчения построений зададим следующее условие: возьмём прямую, на которой будем произвольно получать точки.

Дано: предметно - проецирующее цилиндрическое выпуклое круговое зеркало Z, прямая AD (рис. 5) .

1. Проведём на горизонтальной проекции из точки  $s$  произвольный пучок лучей до зеркальной поверхности.
2. С помощью нормалей или кривой мгновенных фокусов строим отражённые лучи (для упрощения изображения вспомогательные линии построения отражённых лучей не показаны).
3. Отметим пересечение отражённых лучей с прямой  $ad$  буквами  $b, c, d$  и пересечение проецирующих падающих лучей с картинной плоскостью  $K$  буквами  $b_z, c_z, d_z$ .

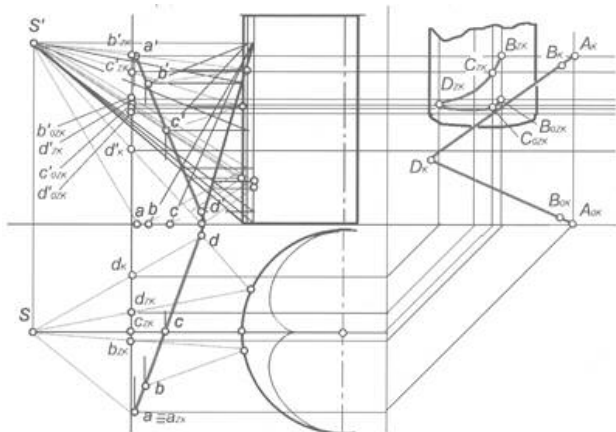


Рис. 5

4. Теперь перейдем к фронтальной проекции. Спроецируем точки падения на фронтальную проекцию, они преобразуются в прямые, представляющие собой мгновенное положение катящейся зеркальной плоскости  $Z_1, Z_2, Z_3$ .
5. Теперь найдём точки падения на фронтальной проекции. Для этого мы проведём перпендикуляры из точек  $S^1$  и  $b^1$  к  $Z_1$ . Проведём диагонали получившейся трапеции  $S^1 b^1 b_p^1 S_p^1$ . Из точки пересечения диагоналей проведём перпендикуляр к  $Z_1$ . Пересечение перпендикуляра с  $Z_1$  будет являться точкой падения луча. Аналогичным образом находятся точки падения проецирующих лучей из точек  $c^1$  и  $d^1$ , и их оснований.
6. Найдём, точки пересечения проецирующих отражённых лучей с картинной плоскостью  $K$ ; получаем  $b_{zk}^1, d_{zk}^1, b_{0zk}^1, d_{0zk}^1$ .
7. Добавляем к полученным проекциям отражений проекции точек  $a_k^1, d_k^1, a_{0k}^1, d_{0k}^1$  на фронтальной проекции,  $ak \equiv a_{0k}, dk \equiv d_{0k}$ .
8. С помощью проекционных связей строим перспективу.

Этот метод является наиболее точным, но достаточно трудоёмок и малонагляден, поэтому на практике удобнее пользоваться методом гомологии.

### 3.2 ПОСТРОЕНИЕ ОТРАЖЕНИЙ МЕТОДОМ ГОМОЛОГИИ

Отражение, построенное методом гомологии, обусловим заменой цилиндрической зеркальной поверхности катящимся плоским зеркалом.

Рассмотрим Построение отражений методом гомологии на примере отражения точки как в выпуклом, так и в вогнутом зеркале.

Дано: выпуклое предметно - проецирующее цилиндрическое круговое зеркало  $Z$ , точка  $A$  (рис. 6).

1. Проведём прямые, соединяющие точки  $D_3$  и  $A \equiv a$  с центром окружности  $O$ .
2. Проведём диагонали получившегося четырёхугольника  $AD_312$  и соединим точку их пересечения с центром

окружности  $O$  нормалью  $n$  (по определению нормали окружности). Точка пересечения окружности и нормали  $3$  будет являться точкой падения проецирующего луча.

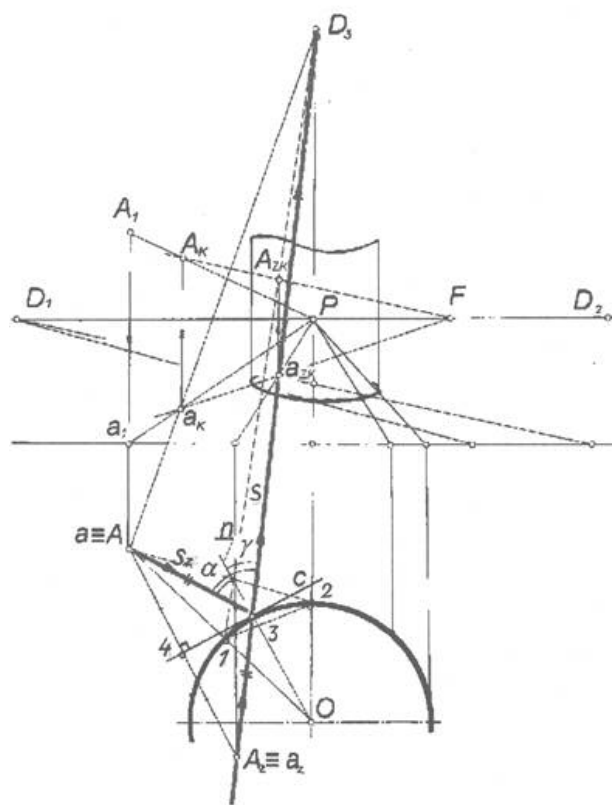


Рис. 6

3. Перпендикулярно нормали через точку падения  $3$  проведём касательную  $c$ .
  4. Отложим на луче  $s$  отражение точки  $A$  точку  $Az \equiv az$  на расстоянии от касательной, равном расстоянию от точки  $A$  до касательной. Получилось два равных прямоугольных треугольника (по двум сторонам и углу между ними). Из этого видно, что отрезок падающего луча  $Az = Azz$ ; поэтому далее можно не прибегать к построению касательной плоскости.
  5. С помощью построений метода гомологии получаем изображение основания точки  $a$  и её отражения  $a_{zk}$ .
  6. Пользуясь методом боковой стенки и используя свойства цилиндрического зеркала сохранять отношения высот, построим перспективу точки  $A_k$  и её отражения  $A_{zk}$ .
- Аналогичным образом построим отражение точек  $A$  и  $B$  в вогнутом зеркале (рис. 7). Рассмотрим особенности:
- Точка  $A$ , расположенная на картине справа от оси цилиндра отражается в противоположной от неё стороне, то есть отражённое изображение этой точки перевернуто. Так как точка  $A$  лежит дальше фокусного расстояния, это построение совпадает с данными геометрической оптики.
  - Точка  $B$  лежит ближе фокуса от поверхности зеркала и отражается два раза: первый раз отражением является точка  $B_z$ , лежащее в той же стороне, что и точка  $B$  относительно оси цилиндра. Второй раз отражением точки  $B$  является точка  $B_{sz}$ , причём луч, многократно отражаясь, проходит сложный путь, образуя по пути промежуточные отражения точки  $B_{1z} \dots B_{4z}$ . Если на продолжении лучей, проходящих через эти точки, взять точки зрения, отличные от заданной, то становится понятно, насколько отражение зависит от точки зрения.

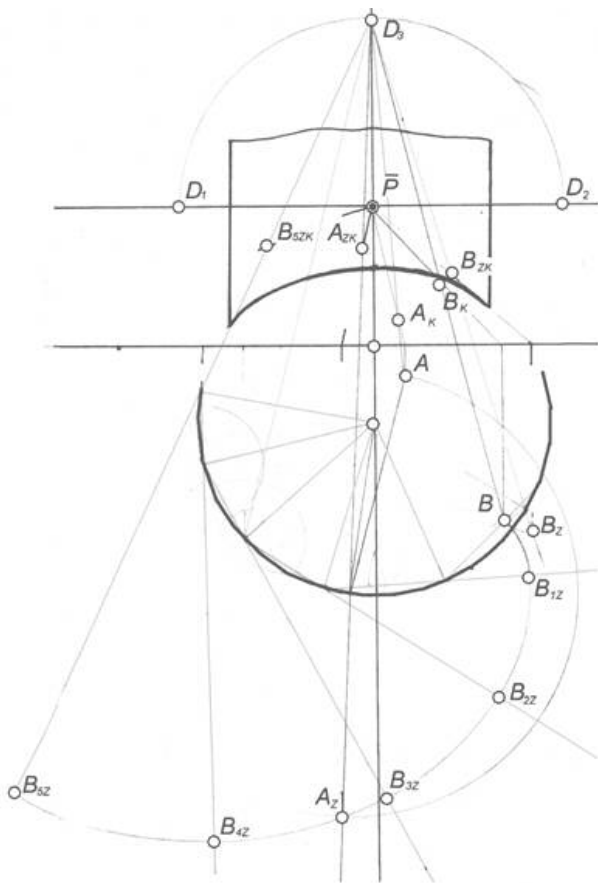


Рис. 7

#### 4. ВЫВОДЫ

В процессе работы решен ряд задач:

1. Поставлен визуальный эксперимент и проанализированы формы отражений в вертикальном цилиндре вращения.
2. Проанализированы и синтезированы данные геометрической оптики и линейной перспективы.
3. Классифицированы «кривые зеркала».
4. Обоснованы способы построения касательной плоскости и нормалей к кривым поверхностям.

5. Для ряда поверхностей обоснован наиболее простой способ построения нормалей с помощью эволют.
6. Проанализированы свойства «зазеркального» мнимого пространства для вогнутого и выпуклого вертикального цилиндра вращения.
7. Разработаны задачи на построение отражений на поверхности предметно - проецирующего цилиндра вращения.
8. Создан видеофильм по материалам исследования.

## Об авторах

Николай М. Бородин, доцент каф. «Черчения, труда и методики», Липецкий Государственный Педагогический Университет, Липецк, Россия  
e-mail: beard@lipetsk.ru

Евгений В. Артемов, учитель «ИЗО и черчения»  
Липецкий Государственный Педагогический Университет,  
Липецк, Россия