

Дискретное геометрическое моделирование в задачах синтеза объектов и процессов среды виртуальной реальности. Технология сквозной дискретизации

Валерий Ли

Таганрогский государственный радиотехнический университет, Таганрог, Россия

Аннотация

В работе излагаются некоторые методы и алгоритмы дискретного геометрического моделирования, разработанные с учетом специфических особенностей задач синтеза объектов и процессов визуальной составляющей среды виртуальной реальности. Введены новые понятия для кривых и их точечных представлений – оптимальная дискретизация, информативность точечных каркасов, интегральная модель. Предлагаемые геометрические методы ориентированы на полигональный метод визуализации виртуальных объектов. Основная область применения – имитационное моделирование в специализированных профессиональных тренажерах.

Введение

При синтезе и рендеринге визуальной составляющей среды виртуальной реальности (имитационной среды (ИС)) для тренажеров необходимо решать двуединую задачу - обеспечение приемлемой реалистичности внешнего облика объектов и достижение реальности масштаба времени отображаемых процессов. Очевидна важнейшая роль, которую играет в этих условиях дискретное геометрическое моделирование. Однако традиционные методы прикладной (инженерной) геометрии не позволяют получать эффективные решения указанных задач.

Специфика полигональной технологии синтеза виртуальных объектов сложной геометрической природы требуют разработки специальных, глобально дискретных, методов обработки графической информации. Предлагаемые ниже теоретические результаты лежат в основе разрабатываемых ИС для различных тренажеров и тренажно-моделирующих комплексов, выполненных в рамках нескольких НИР в НКБ «МИУС» ТРТУ в последнее десятилетие. При этом для практической реализации созданных технологий в настоящее время используются следующие программные средства:

- система программирования Delphi;
- программный комплекс создания приложений виртуальной реальности WorldUP для Windows;
- система программирования Watcom C for Windows;
- система разработки 3D объектов, сцен и анимаций – 3D Max.

Система программирования Delphi используется для интеграции разработанных приложений в общую информационную экспертную систему поддержки тренажеров.

Программный комплекс создания приложений виртуальной реальности WorldUP используется для

геометрического моделирования и интерактивного проектирования сценариев тренажа, а также для интерактивной визуализации динамических сцен в реальном времени и при создании видеоряда контроля рабочей зоны тренируемого оператора.

Система программирования Watcom C for Windows используется для написания эффективных специальных приложений и интерфейсных процедур.

Система 3D Max используется на подготовительном этапе как эффективный редактор при проектировании сложных трехмерных объектов и сцен для последующего их экспорта в WorldUP.

1. Интерполяция пространственных точечных каркасов

Специфика моделирования виртуальных объектов в полигональной форме требует обязательной дискретизации всех криволинейных форм. Поэтому наиболее приемлемыми будут такие методы конструирования обводов, которые, во-первых, могут быть реализованы непосредственно в пространстве, во-вторых, результирующая кривая или сразу должна быть представлена в кусочно-линейном формате, или предполагать простую (в смысле вычислительной реализации) дискретизацию. Необходимо также учитывать то обстоятельство, что классическая постановка задачи аппроксимации кривой дугами более простых кривых (в том числе и отрезками прямых) для рассматриваемых применений неприемлема, так как пространство моделирования СВР не имеет привычной метрической определенности. Таким образом речь идет о принципиально новой постановке задачи аппроксимации, а точнее – дискретизации кривых.

Известны и общеприняты классификации плоских обводов по порядку гладкости. Для пространственных обводов, при том же инженерном определении обвода, как составной кривой, смежные дуги которой имеют определенный порядок стыковки (гладкости), предлагается следующая обобщающая классификация. Порядок гладкости пространственного обвода гладкого в инженерном смысле, что соответствует регулярной кривой, обозначается как Γ_k/Γ_τ , где Γ_k – порядок гладкости по кривизне; Γ_τ – порядок гладкости по кручению.

Пространственная ломаная имеет гладкость вида $0/0$. При $\Gamma_k=1$ для смежных дуг обвода имеет место общность касательных, при $\Gamma_\tau=1$ имеет место общность соприкасающихся плоскостей. У обвода с гладкостью вида $1/0$ смежные дуги имеют совпадающие нормальные плоскости, а соприкасающиеся плоскости имеют некоторый угол рассогласования. У обвода с гладкостью вида $0/1$ смежные дуги имеют совпадающие соприкасающиеся плоскости, а нормальные

плоскости имеют угол рассогласования. У обвода вида 1/1 смежные дуги имеют совпадающие трехгранники Френе.

При $\Gamma_k = 2$ для смежных дуг имеет место совпадение нормальных плоскостей и радиусов кривизны, при $\Gamma_\tau = 2$ – совпадение соприкасающихся плоскостей и радиусов второй кривизны. Так у обвода вида 2/1 смежные дуги имеют в точке стыка общий трехгранник и равные радиусы кривизны. И т.д.

Разработаны два алгоритма конструирования пространственных обводов из дуг плоских кривых: на основе метрической и на основе угловой развертки. Суть первого метода состоит в развертывании цилиндрической поверхности, на которой располагается исходный точечный каркас, при этом происходит искажение углов; при втором методе пространственная ломаная последовательными вращениями вокруг очередного звена совмещается с плоскостью, в которой строится обвод. На заключительном этапе производится обратное преобразование конструкций в пространство. Второй метод более алгоритмичен, но не позволяет построить обвод с гладкостью по кручению Γ_τ выше 1.

По аналогии с известным плоским радиусографическим методом разработан сферографический метод конструирования пространственного обвода (рис. 1). Обвод строится непосредственно в пространстве. Дуги обвода – большие круги сопряженных сфер.

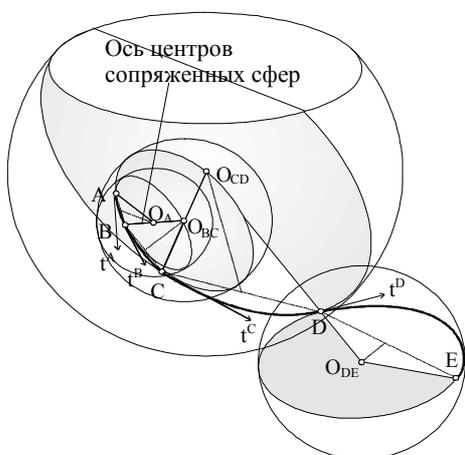


Рис. 1

Алгоритм построений: Хорда AB \Rightarrow Соприкасающаяся плоскость дуги AB \Rightarrow Главная нормаль в точке A \Rightarrow Срединная нормальная плоскость хорды \Rightarrow Центр кривизны дуги AB \Rightarrow Главная нормаль в точке B \Rightarrow Хорда BC \Rightarrow Соприкасающаяся плоскость дуги BC \Rightarrow Срединная нормальная плоскость хорды BC \Rightarrow и т.д. Способ задания касательной t^A в первой точке основан на анализе гладкости угловой развертки всего точечного каркаса. Радиус R_{AB} первой сферы определяется сферой, проходящей через первые 4 точки каркаса.

Обводы на поверхностях порядка гладкости 1/0 можно также конструировать с помощью разверток касательных плоскостей, что дает возможность минимизировать суммарную длину касательных в

узлах точечного каркаса. На рис. 2 показан пример построения дуги обвода, лежащего на поверхности цилиндра вращения. Касательные t_A и t_B лежат в касательных плоскостях, отсеки которых ограничены ребрами P_{IA} , P_{AB} , P_{BJ} . На развертке касательных плоскостей (рис. 3) имеем единственное положение касательных t_A и t_B , при котором суммарная длина касательных, а значит и обвод в целом будет иметь минимальную длину.

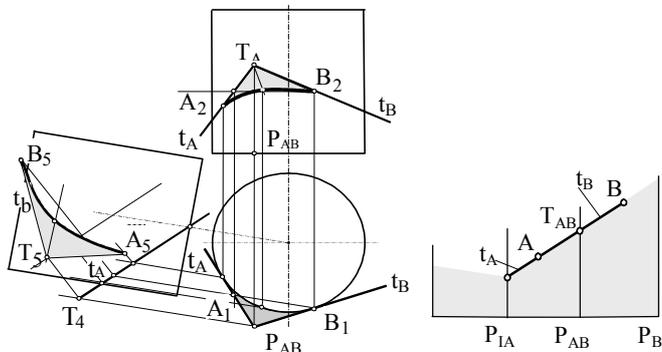


Рис. 2

Рис. 3

Конструирование пространственных обводов порядка гладкости до 2/2.

Для случаев, когда в узловых точках известны положения касательных возможно построение обводов порядка гладкости до порядка 2/2 включительно. Метод назван методом мгновенных преобразований соприкасающейся плоскости и заключается в дискретном вращении соприкасающейся плоскости вокруг текущего звена ломаной каркаса. Метод применим к большинству известных способов конструирования плоских обводов, если они сводятся к последовательным дискретным построениям: проективные методы, метод инженерного дискриминанта и т.д.

Так известен метод конструирования плоской кривой 2-го порядка с помощью двух проективных пучков. Для пространственной задачи касательные t_1 и t_2 будут скрещивающимися прямыми. Пусть задан интервал T_1, T_2 и положение касательных t_1 и t_2 (рис. 4).

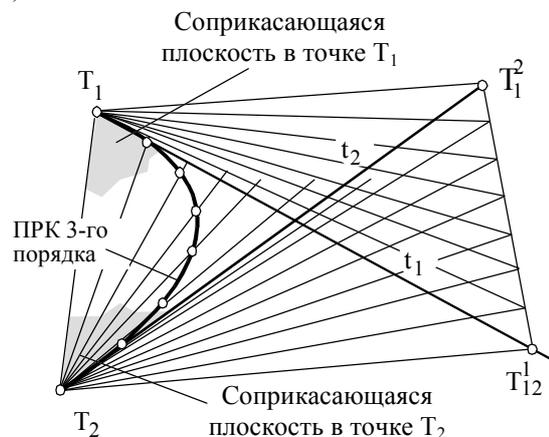


Рис. 4

В общем случае произвольно назначаются точки T_{12}^1 и T_{12}^2 и параметр дискретизации N . Производится поточечное построение обвода, каждая точка которого лежит в одном из

промежуточных положений соприкасающейся плоскости.

Соприкасающаяся плоскость вращается вокруг хорды АВ от начального положения $T_1 T_{12}^1 T_2$ до положения $T_1 T_{12}^2 T_2$, занимая N-1 промежуточных положений. Три проективных пучка порождают кривую 3-го порядка. Если полученную конфигурацию параллельно спроецировать в направлении $T_{12}^1 T_{12}^2$ на одну из начальных соприкасающихся плоскостей, то получаем известную конструкцию полинома Безье. Кривизна построенной кривой в точке T_1 оценивается величиной $k_1 = \frac{T_1 T_{12}^1 + T_{12}^1 T_2 - T_1 T_2}{T_1 T_2}$,

в точке T_2 - величиной $k_2 = \frac{T_1 T_{12}^2 + T_{12}^2 T_2 - T_1 T_2}{T_1 T_2}$,

кручение в точке T_1 - величиной $\tau_1 = \frac{T_{12}^1 T_{12}^2}{T_1 T_{12}^1}$, в точке

T_2 - величиной $\tau_2 = \frac{T_{12}^1 T_{12}^2}{T_1 T_{12}^2}$. При $k_1, k_2 > 1$ дуга

содержит точку перегиба по кривизне, при $\tau_1,$

$\tau_2 > 1$, - точку перегиба по кручению.

2. Оптимальная дискретизация, интегральная модель кривой

• В последние десятилетия в прикладной геометрии сформировалась классическая технологическая цепочка в конструировании, представлении и воспроизведении объектов сложной геометрической природы. В обобщенном виде последовательность операций схематично изображена на рис. 5. Приведенная схема в целом отражает и технологию обработки геометрической информации для сложных технических поверхностей. При этом важной отличительной особенностью такой технологии является применение метрических параметров δ и δ^* , определяющих качество аппроксимации и воспроизведения геометрических прообразов. Такая схема оправдана, если к обрабатываемым объектам предъявляются высокие требования по точности конструирования и воспроизведения. Анализ исследовательских работ в области синтеза СВР и экспериментальные исследования позволяют схематично отобразить структуру основных факторов обеспечения реалистичности СВР.



Рис. 5

В части, касающейся непосредственно геометрического моделирования, в первую очередь необходимо обеспечение геометрического подобия объектов. В этом случае возникают нетрадиционные критерии оценки качества дискретизации кривых и поверхностей, что обусловлено следующим:

- все объекты (кривые и поверхности) предъявляются к визуализации в сценах ВР в полигональной форме;

- количество полигонов должно быть минимально достаточным для обеспечения визуального подобия и, в то же время, приемлемым по времени вычислительной и графической обработки.

2.1. Оптимальность дискретного представления кривых

Существо проблемы оптимизации дискретного представления кривых заключается в следующем. Классическая, метрически ориентированная дискретизация (например, по стрелке прогиба δ) в зависимости от выбранного направления, в общем случае дает различные результаты (рис. 6а и 6б).

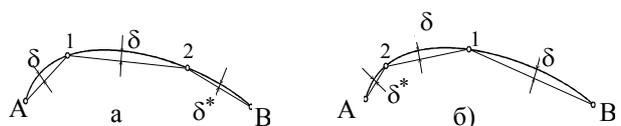


Рис.6

Причина несовпадения результатов дискретизации очевидна, но необходимо отметить, что и величина δ^* также получается переменной. Узлы 1 и 2 в обоих случаях расположены не рационально, что можно

отметить даже визуально (последние интервалы имеют завышенную точность). Отсюда вытекает, что узлы каркаса не равны между собой по своей геометрической информативной значимости.

В задачах полигонизации виртуальных объектов необходимо решать эту задачу в другой постановке. А именно, – размещать узлы дискретизации при наперед заданном их количестве. Естественно, что при традиционном подходе задача становится нелинейной и вычислительно трудно разрешимой, а в случае пространственной кривой (ПРК) – вообще неразрешимой.

В задаче отыскания минимизирующей дискретизации в первую очередь необходимо стремиться к сохранению, в максимальной степени, геометрических свойств. Поэтому в качестве критериев близости двух кривых следует рассматривать те варианты, которые имеют дифференциально-геометрический смысл. Будем опираться на понятие изогометрической аппроксимация, когда под мерой близости интервалов разбиения понимается степень отклонения интегральной совокупности дифференциальных характеристик предельно допустимого порядка. Изогометрическая аппроксимация введена для функций одного и двух переменных на основе рассмотрения множества точек перемен знака производных. Для аппроксимации функции $y_1(x)$ функцией $y_2(x)$ это эквивалентно использованию характеристик отклонения вида

$$h_i(y_1, y_2) = \left| \frac{d^i y_1(x)}{dx^i} - \frac{d^i y_2(x)}{dx^i} \right|; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Уточним критерии близости - h_i , установив следующие требования к ним:

- характеристика “близости” двух объектов должна быть эффективно вычислимой;
- совокупность характеристик должна быть полной, то есть включать достаточный для приложения набор параметров;
- мера отклонения по каждой характеристике должна иметь достаточно наглядный, практически применимый характер.

Известно, что с точностью до движения пространственная кривая определяется кривизной и кручением, а поверхность - коэффициентами первой и второй квадратичных форм, однако прямое использование этих параметров в качестве характеристик близости кривых или поверхностей является проблематичным из-за вычислительной сложности и отсутствия наглядности. Задачу поиска оптимального дискретного каркаса кривой можно сформулировать в двух вариантах:

Пусть известен некоторый метод восстановления кривой f_1 , который позволяет по набору точек T_1, T_2, \dots, T_N построить некоторую интерполирующую кривую f_2 , удовлетворяющую избранному критерию близости с исходным прообразом. Существует ли экстремум (в смысле минимума) числа N ? Усиленный вариант задачи – дополнение вопросом о единственности решения.

Вариационное исчисление позволяет утверждать, что при заданном N для дуги регулярной кривой

существует оптимальное размещение узлов дискретизации, но аналитическое (или численное) решение такой задачи сводится к интегрированию некоторого минимизирующего функционала. Задача приближения дуги регулярной и монотонной кривой ломаной линией в общем виде сводится к следующей задаче. Среди кривых $y=f(x)$, принадлежащих классу $C^{(1)}$ на интервале $[a, b]$ и удовлетворяющих условию $y(a)=m, y(b)=n$, найти ту, которая реализует минимум функционала

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx.$$

Также из вариационного исчисления известно, что для дуги любой регулярной кривой $y=f(x)$ всегда можно найти такую ломаную P , проходящую через точки $A(a, m)$ и $B(b, n)$, которая будет отличаться от кривой сколь угодно мало как по стрелке прогиба δ , так и по угловому коэффициенту касательной в любой точке интервала. Другими словами, для ломаной линии P значение функционала $I\{P\}$ будет отличаться от $I\{f(x)\}$ сколь угодно мало. И наоборот, для всякой ломаной линии P , проходящей через точки A и B , всегда можно построить такую допустимую кривую $y=f(x)$, проходящую через вершины ломаной, что значение функционала $I\{f(x)\}$ также будет отличаться сколь угодно мало от $I\{P\}$. Пусть g – точная нижняя граница значений функционала $I\{f(x)\}$ на множестве всех допустимых кривых. Тогда можно утверждать:

1) существует такая последовательность ломаных линий $\{P_n\}$, проходящих через точки $A(a, m)$ и $B(b, n)$, что $\lim I\{P_n\} = g$, при $n \rightarrow \infty$;

2) для каждой ломаной P_i , проходящей через точки A и B , выполняется неравенство $I\{P_i\} \geq g$, то есть число g является точной нижней границей значений $I\{P\}$.

Пусть минимизирующая последовательность ломаных линий построена. Если решение рассматриваемой задачи существует, то можно ожидать, что построенная последовательность ломаных будет сходиться к этому решению. Но последнее заключение будет справедливым только в том случае, когда минимизирующая последовательность ломаных сходится к допустимой кривой, то есть, если существует возможность предельного перехода под знаком интеграла, то есть, что $g = \lim I\{P_n\} = I\{\lim P_n\}$, при $n \rightarrow \infty$.

Существует очевидный процесс построения минимизирующей последовательности ломаных линий. Пусть P_n – произвольная ломаная, имеющая n вершин в точках $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$ и проходящая через точки A и B , причем обязательно выполнение условия, что все узла располагаются внутри интервала, то есть $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$.

Так как на интервале $[x_i, x_{i+1}]$ ордината ломаной может быть записана в виде

$$y = f(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) = y_i + \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} (x - x_i),$$

то после подстановки ломаной P_n получаем

$$I\{P_n\} = \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(F \left(x_i, y_i + \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} (x - x_i), \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right) \right) dx \quad (x_0 = a, x_{n+1} = b).$$

После интегрирования находим $I\{P_n\}$ как функцию $2n$ переменных. Если определить числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ такие, что функционал $I\{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n\}$ достигал минимума, то последовательность ломаных P_n будет минимизирующей.

Фактически получено приближенное решение дифференциального уравнения вариационным методом. Необходимо также заметить, что описанный прямой вариационный метод имеет и очевидную геометрическую интерпретацию. А именно, если под близостью дуги кривой и вписанной в нее ломаной понимать не только метрическую, но и дифференциальную близость, то задача сводится к решению дифференциального уравнения, которое невозможно найти без применения операции интегрирования. При этом важно отметить, что такое решение будет иметь порядок точности не выше $h^3(0)$. Это свидетельствует о том, что для повышения точности решения и меры близости, например до $h^4(0)$, придется применять двойное интегрирование и т.д.

С геометрической точки зрения дискретизацию можно представить как операцию разбиения кривой на заданном интервале на требуемое количество подынтервалов. Тогда разбиение будет оптимальным в том случае, если полученные дуги на подынтервалах будут, по крайней мере, эквивалентны (в частном случае, подобны) с точностью до масштабирования или равны вплоть до метрических характеристик. В этом состоит принципиальное отличие задачи дискретизации от кусочно-линейной аппроксимации. Известно также, что для дифференциальных уравнений вида $dy/dx=f(x,y)$, всегда можно получить приближенное решение в форме степенного ряда требуемой степени. Если же удовлетвориться приближенной формулой $\delta y \approx f(x,y)\delta x$, то можно построить искомую интегральную кривую в виде ломаной Эйлера.

2.2. Интегральная модель кривой

В дифференциальной геометрии можно выявить связь кривой с графическим представлением параметров, определяющих ее форму. Для пространственной кривой, по аналогии с натуральными уравнениями ее задания, можно поставить в однозначное соответствие графическое представление ее полной кривизны, поскольку по теореме Ламе $K(s)^2 = k(s)^2 + \tau(s)^2$. Тогда можно сформулировать следующее

Определение. Интегральной моделью K кривой в натуральной параметризации на интервале $[s_1, s_2]$ называется отсек линейчатой поверхности с плоскостью параллелизма kt и двумя направляющими: отрезком $[s_1, s_2]$ и линией $K(s)$ полной кривизны (рис. 7).

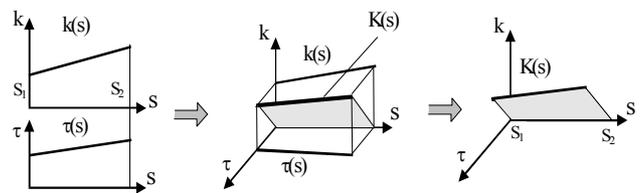


Рис. 7

Очевидно, что интегральная модель кривой (ИМК) - есть наиболее компактное представление кривой, однозначно определяющее ее в пространстве с точностью до движения.

В декартовых координатах площадь коноида интегральной модели K может быть выражена через функции кривизны и кручения как двойной интеграл в области (D) на интервале $[s_1, s_2]$

$$K_{(D)} = \iint_{(D)} (\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}) dx dy,$$

$$z = \frac{yh(y)}{f(x)}; \quad z'_x = \frac{-yh(y)}{f(x)^2} f'(x);$$

где

$$z'_y = \frac{h(y) + yh'(y)}{f(x)},$$

а функции $h(y)$ и $f(x)$ - отображения функций $k(s)$ и $\tau(s)$ на координатные плоскости.

В частных случаях ИМК может представлять собой прямоугольник (для цилиндрической винтовой линии постоянного шага, гиперболической спирали), или косую плоскость (гелиса).

2.3. Оценки информативности дискретных каркасов кривых

Для осуществления качественной оценки дискретных каркасов кривых введем понятие их информативности в терминах теории информации.

Для фиксированного числа N $[i=1 \dots N]$ точек, независимо распределенных в пространстве конечной области D , справедлива теорема Крофтона, опирающаяся на меру Лебега $m(E)$ распределения случайного числа точек в евклидовом пространстве с распределением Пуассона со средним $\lambda m(E)$, где λ - некоторая константа. Для конечного числа точек мера Лебега будет равна $\{m(D)\}^2$, где D - подобласть измеримого пространства E .

Предположим, необходимо вычислить вероятность события, что фигура R , образованная N точками, обладает свойством, определяемым только их взаимным расположением, но не взаимным положением R и D , свойствами инвариантности относительно операций трансляции и поворота. В качестве такого свойства можно принять, например, условие, что расстояние между двумя точками не превышает некоторой, наперед заданной величины ρ . Тогда вероятность p того, что R удовлетворяет условию, равна

$$p = \frac{m^*(R)}{\{m(D)\}^2},$$

где $m^*(R)$ - мера Лебега множества R , удовлетворяющего наложенному условию.

При построении обводов точек практически всегда выполняется условие, что индексация узлов каркаса производится так, что для любой текущей точки предыдущая и последующая являются ближайшими. На основании этого можно утверждать, что и для конечного неиндексированного множества точек $\{R\}$, при наложении условия минимальности расстояния при выборе последующей точки, всегда можно получить закон индексации, обладающий свойством однозначности и сходимости, то есть упорядочения всех точек заданного множества. Естественно, что для этого необходимо также оговорить порядок действий при неоднозначности реализации указанной индексации (две или более точек равноудалены от текущей точки), а именно: для текущей точки R_i последующей назначается такая точка R_j , которая имеет ближайшей точку R_{j+1} , которая, в свою очередь, является ближайшей для точки R_i . При последовательном соединении проиндексированных точек всегда будет получена незамкнутая пространственная ломаная без самопересечений.

Под устойчивостью многоточечной системы будем понимать ее свойство реагировать на внешние воздействия (устойчивость по Ляпунову). В нашем случае – это изменение положения какой-либо точки, или нескольких точек. Состояние равновесия для некоторого индексированного множества точек $\{A_i\}$ размерности N , оценивается величиной отклонения некоторого функционала U

$$U = u(\{x_i\}, \{y_i\}, \{z_i\})$$

от начального значения U_0 , при введении в рассмотрение некоторых возмущений из набора $(\{\delta x_i\}, \{\delta y_i\}, \{\delta z_i\})$. Система устойчива по Ляпунову, если при наличии возмущения, величина U остается вблизи значения $U(\{x_i\}_0, \{y_i\}_0, \{z_i\}_0)$ с заданной нормой ξ .

Исходными условиями введения понятия устойчивости примем следующие:

- две точки в пространстве однозначно определяют прямую (как частный случай кривой), любое количество точек, принадлежащих этой прямой, не могут улучшить ее задание, поскольку оно уже является предельным. Информативность такого каркаса – максимальна;
- точки, расположенные в вершинах тетраэдра (на плоскости – в вершинах равностороннего треугольника) или куба, соответствуют другому предельному варианту точечного множества, так как ни при каком алгоритме индексации не позволяют построить непрерывную гладкую кривую. Информативность такого каркаса минимальна (рис. 8).

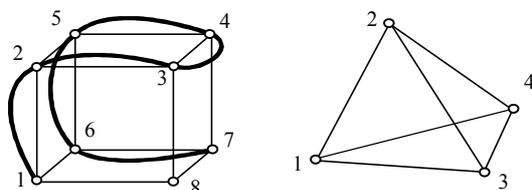


Рис. 8

Введем понятие устойчивости U незамкнутого точечного каркаса, которая оценивается функционалом вида:

$$U = \max_N \left\{ \frac{(B+C)}{L} - 1 \right\},$$

где B – длина отрезка $A_{i-1}A_{i+1} = \min_K \{A_K A_{K+1}\}$, для всех $k = [1:N]$;

C – длина отрезка $A_i A_{i+1} = \min_K \{A_K A_{K+1}\}$, для всех $k = [1:N-1]$;

L – длина отрезка $A_{i-1}A_{i+1}$, для всех $k = [2:N-1]$.

Данный функционал построен с учетом ограничений: количество точек не может быть менее 3, а величина $(B+C)$ должна превышать L . Невыполнение последнего условия соответствует тем случаям, когда исследуемая точечная конфигурация определяет объект неоднозначно, другими словами, при $U < 0$ система неустойчива и состояние объекта (форму интерполирующей этот точечный каркас кривой) не отражает.

Для устойчивого состояния конфигурации значение функционала U должно находиться в пределах от 0 до U_{\max} :

$$U_{\max} = \frac{2 \left(\max_l \{A_l A_{l+1}\} \right)}{\min_m \{A_m A_{m+2}\}} - 1,$$

для $m = [1:N-2]$, $l = [1:N-1]$.

Информативность T точечного каркаса определяется как $T = \log_2(U)$ (бит).

2.4. Оптимальная дискретизация кривой

Пусть $\gamma: I \rightarrow R^n$ – регулярная кривая. Замена параметра (перепараметризация) – это отображение $h: J \rightarrow I$. Отображение должно удовлетворять требованиям:

- h – гладко, то есть все производные $h^{(i)}(s)$ существуют для всех $s \in J$;
- $h'(s) \neq 0$ при каком $s \in J$;
- $h(J) = I$,

h – биекция J на I , поэтому существует и обратное отображение $h^{-1}: J \rightarrow I$.

Частным случаем перепараметризации является аффинная операция масштабирования.

Отображение h – диффеоморфизм, в категориях дифференциальной геометрии. Этому понятию можно поставить в соответствие понятие эквивалентных дуг гладких кривых.

Предложение 1. Две дуги гладкой (гладких) кривой эквивалентны, если существует биекция – отображение h , обладающее свойством диффеоморфизма. С точностью до операции трансляции и масштабирования, эквивалентность дуг определяет равенство их сферических индикатрис касательных и интегральных конических кривизн.

Следствие 1. Дуга гладкой кривой и ее эквидистанта – эквивалентны.

Следствие 2. Эквивалентные дуги кривой постоянной кривизны и кручения равны.

Следствие 3. Эквивалентные дуги геликс –

подобны (равны с точностью до масштабирования).

Следствие 4. Дуги кривой с конической кривизной равной нулю, эквивалентны, если равны их интегральные полные кривизны.

Деление ИМК на равновеликие фигуры приводит к задаче нелинейного геометрического программирования, так как только для цилиндрических винтовых линий и гиперболических спиралей результаты деления на равновеликие фигуры графиков кривизны и кручения совпадают с результатом деления интегральной кривизны кривой (рис. 9, 10).

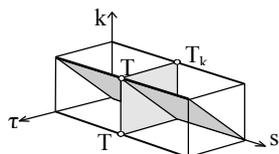


Рис. 9

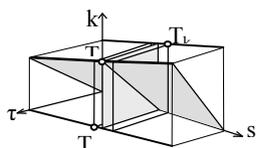


Рис. 10

В общем случае с погрешностью порядка $h^4(0)$ дуги гладкой кривой эквивалентны, если равны их интегральные конусы кривизны и кручения, то есть равны их интегральные полные кривизны.

Вписанная пространственная ломаная обобщенной винтовой линии, заданной в натуральной параметризации на интервале $[s_1, s_2]$, выделяющаяся на кривой эквивалентные дуги, определяется выражением

$$P_j = \frac{1}{j-1} \int_{s_1}^{s_j} K(s) ds,$$

где j - размерность дискретного каркаса;

$K(s)$ - полная кривизна кривой;

P_j - интегральная (полная) кривизна выделяемой дуги подынтервала.

Геометрическая интерпретация метода: с погрешностью $h^3(0)$ - очередная точка разбиения находится как точка пересечения дискретизируемой кривой конусом вращения с углом при образующей P_j и осью, совпадающей с текущей касательной (рис.11).

Предложение 2. Для заданного N дискретизация R^* кривой L оптимальна, если $T = \max_{R^*} \{T\}_N^j, \forall R_N^* \in L$.

С учетом введенного понятия информативности каркаса T можно сформулировать признаки геометрически оптимальной дискретизации в следующем виде.

Предложение 3. Точечный каркас кривой геометрически оптимален, если при заданном параметре дискретизации N он имеет максимальную величину информативности T , и при удалении

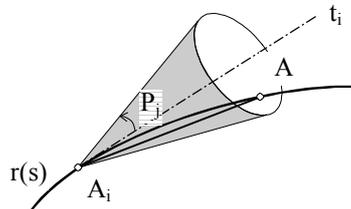


Рис. 11

любого из внутренних узлов информативность каркаса снижается на одну и ту же величину.

Покажем принципиальное отличие оптимальной дискретизации кривой на примере плоской монотонной кривой, что не снижает общности метода. Дискретизация по ИМК обладает свойством аддитивности и однозначности. Так для заданного $N=3$ (на рис. 12 интегральная модель разделена на 3 равновеликие по площади трапеции), в результате чего получена дискретизация, представленная на рис. 13.

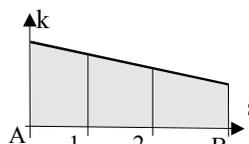


Рис. 12

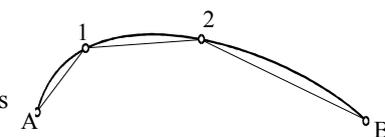


Рис. 13

Результаты анализа информативности трех вариантов каркаса одной кривой при поочередном удалении внутренних узлов приведены в таблице 1. Данные эксперимента показывают, что информативность каркаса рис. 13 распределена между узлами значительно равномернее, чем на каркасах рис. 6.

Таблица 1

Каркас рис.№	Полная информативность каркаса	Информативность каркаса без узла 1	Информативность каркаса без узла 2	Усредненный разброс информативности узлов
6а	3,38	1,45	2,12	19%
6б	4,22	1,36	2,27	21%
13	4,84	1,84	2,33	11%

2.5. Моделирование дискретного каркаса кривой по ее интегральной модели

Известен классический метод графического конструирования пространственных кривых, заданных в натуральной параметризации. Однако, такой подход неприемлем для современных систем обработки и визуализации графической информации, так как требует реализации трех операций графического (на графиках функций

интегрирования и трех операций графического дифференцирования, что приводит к большим объемам вычислений и погрешностям построений. Кроме того, метод не предусматривает реализации возможности рациональной дискретизации для формируемого точечного каркаса конструируемой кривой.

Используя понятия дискретных аналогов кривизны и кручения для ломаной пространственной линии и

обоснование достижения ее однозначного соответствия непрерывному гладкому прообразу, а также теоретическое доказательство развертываемости кривой на плоскость, можно реализовать следующий алгоритм построения кусочно-линейного каркаса кривой по ее интегральной модели.

Если рассмотреть трехгранник Френе для некоторой точки пространственной кривой и совместить эту точку с началом локальной системы координат, то для кривых с линейным изменением кривизны и

кручения процесс формирования кривой сводится к последовательности операций вращения и трансляции этой локальной системы. При этом операцию вращений можно минимизировать, если применить известное понятие главного угла Эйлера. Задавшись начальными условиями ориентации, размерностью искомого точечного каркаса кривой и подвергнув рациональной дискретизации графики функций ее кривизны и кручения, можно реализовать следующий алгоритм конструирования кривой в пространстве (рис. 14):

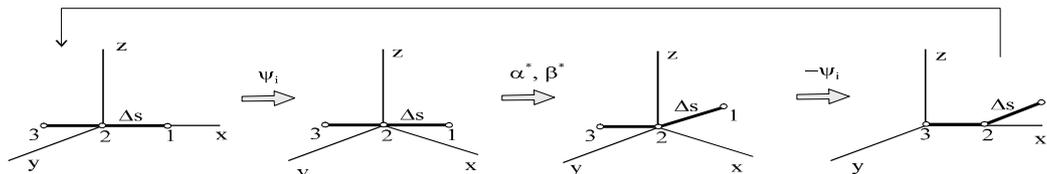


Рис. 14

- определить углы ψ , α и β ;
 - выполнить сдвиг на Δs (хорда, соответствующая длине дуги интервала дискретизации);
 - выполнить последовательно два вращения на углы α и β (соответствующие площадям выделенных полос интервала для графиков кривизны и кручения);
 - переместить сопровождающий трехгранник в очередную точку;
 - переместить всю конфигурацию в исходную точку;
- и т.д.

Данный алгоритм обладает накапливающейся методической погрешностью (но допускающей коррекцию): ΔL - метрическая погрешность и $|\beta - \beta^*|$ - угловая погрешность, которые взаимосвязаны и обратно пропорциональны размерности искомого каркаса. При компьютерной визуализации конструируемой кривой лонгальность параметра s взаимосвязывается с требуемой разрешающей способностью изображения, тогда операция масштабирования будет корректна с точностью до выбранной или требуемой метрики.

На рис. 15 показан пример моделирования кривой с постоянными и равными кривизной и кручением

(гиперболическая спираль – частный случай гелисы), на рис. 16 совмещены при равных начальных условиях две кривые с постоянными, но не равными кривизной и кручением, причем кривизна одной кривой является кручением второй и наоборот (дифференциально обратные кривые).



Рис. 15



Рис. 16

На рис. 17 представлен дискретный синтез (120 элементов) сложной каналовой поверхности, образованной изгибанием оси цилиндра вращения по заданным графикам кривизны и кручения пилообразной конфигурации.

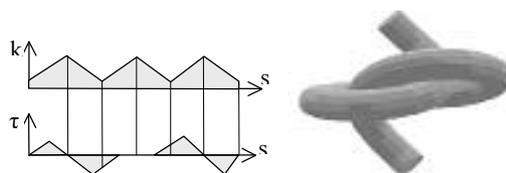


Рис. 17

С методологической точки зрения можно констатировать, что геометрический инструментарий на алгоритмическом уровне в основном сформирован, он позволяет реализовать все этапы синтеза и визуализации СВР. Учитывая результаты экспериментов можно заключить, что сформирована геометрическая и алгоритмическая основы технологии синтеза объектов и сцен СВР, принципиально отличающейся от традиционной (см. рис. 5), заключающаяся в сквозной (тотальной) полигонизации (рис. 18).

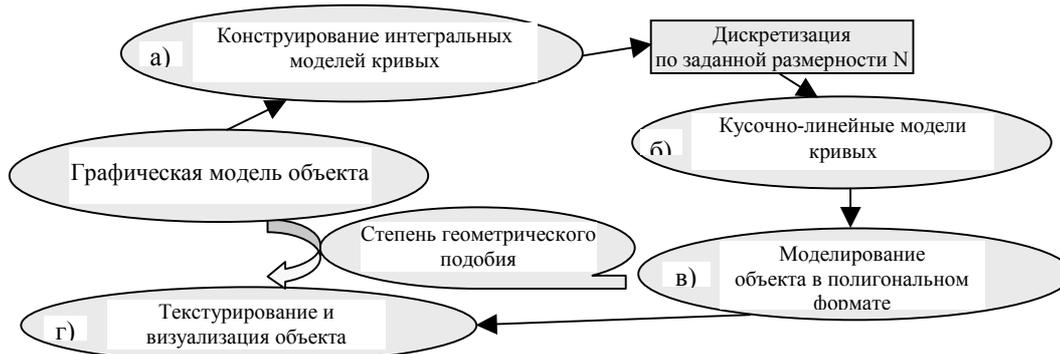


Рис. 18

3. Моделирование кинематического метода образования поверхностей в полигональном формате

Технологию сквозной дискретизации всех этапов моделирования объектов сложной геометрической природы можно наглядно продемонстрировать на примере автоматизированного синтеза поверхностей кинематическим методом. Пусть заданы интегральные модели двух кривых:

- m – пространственная направляющая;
- l – плоская образующая,

а также параметры формы некоторой кинематической поверхности (рис. 19):

- α - угол наклона плоскости образующей l относительно касательной плоскости направляющей m ;
- β - угол поворота касательной t_l образующей относительно касательной t_m направляющей в касательной плоскости направляющей.

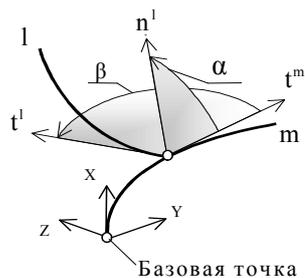


Рис. 19

Степень дискретизации моделируемой поверхности определяется заданным числом четырехугольных полигонов и соответствует произведению параметра дискретизации образующей на параметр дискретизации направляющей.

Ниже приведены таблицы всех управляющих параметров кинематической поверхности.

Таблица 2 (параметры объекта)

Количество полигонов	Допустимый угол смежности	Допустимый угол неплоскостности полигонов
N	θ	Ω

Таблица 3 (параметры направляющей)

Кривизна	Кручение	Длина	Допустимый угол смежности
k_1, k_2	τ_1, τ_2	L	γ

Таблица 4 (параметры образующей)

Кривизна	Длина	Наклон плоскости	Поворот плоскости	Симметричность профиля
k_1, k_2	L	α	β	1/0

Угол неплоскостности Ω полигона определяет пороговую величину в градусах (от 10 до 20), которая равна углу при диагонали четырехугольного полигона. Если угол превышает Ω , то полигон следует разделить на два треугольных полигона, в противном случае могут возникнуть нежелательные визуальные эффекты при реализации операций текстурирования или сглаживания, при решении

задачи определения взаимной видимости полигонов. На рис. 20 приведены изображения (“проволочная” и текстурированная модели под разными ракурсами в линейной перспективе) синтезированной поверхности. Количество полигонов $N=180$, допустимый угол смежности θ – не более 20 град., допустимый угол неплоскостности Ω – не более 10 град.



Рис. 20

Восстановление кривых по интегральным моделям в виде ломаной линии обеспечивает определение дифференциально-геометрических характеристик в узлах и можно достаточно просто имитировать практически все известные методы конструирования поверхностей.

4. Моделирование закритической деформации тонкостенных упругих оболочек

Изгибания, соответствующие закритическим деформациям, принадлежат классу задач на кусочно-регулярных поверхностях. Это означает, что поверхности всегда имеют ребра. Как правило, – это линии сети геодезических. Данное положение

определено тем, что в теории оболочек не учитываются внутренние напряжения и деформация сводится к чисто геометрической, то есть – изометрической. А изометрическое преобразование поверхностей наиболее точно отображается на сетях геодезических линий. Механически теория ребер подтверждается известным принципом о концентрации напряжений в их окрестности.

Пусть исходная оболочка F под действием нагрузки P деформируется, принимая форму F' . При этом внутренние усилия, возникающие в материале оболочки, производят некоторую работу, называемую энергией деформации, которая определяется формулой

$$\Delta U_{D^*} = C_1 \iint_{D^*} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2) d\sigma + C_2 \int_{\tilde{\gamma}} \frac{\alpha^{5/2}}{\rho^{1/2}} ds_{\tilde{\gamma}} + C_3 \int_{\tilde{\gamma}} \alpha (-2k + k_e + k_i) ds_{\tilde{\gamma}},$$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные, характеризующие физические свойства материала оболочки, такие как упругость, коэффициент Пуассона, толщина оболочки;

$\Delta k_1, \Delta k_2$ – главные изменения нормальных кривизн при переходе от исходной формы D к изометрическому преобразованию D^* ;

k_e и k_i – нормальные кривизны поверхности D^* в направлении, перпендикулярном ребру $\tilde{\gamma}$;

k – нормальная кривизна недеформированной поверхности в соответствующем направлении;

2α – угол между касательными плоскостями деформированной поверхности в точке ребра;

ρ – радиус кривизны кривой $\tilde{\gamma}$;

σ – толщина оболочки.

В приближенных аналитических методах расчета критических деформаций оболочек наиболее распространена схема «зеркального выпучивания», суть которой проиллюстрирована на рис.21.

Если в качестве условий моделирования принять следующие ограничения:

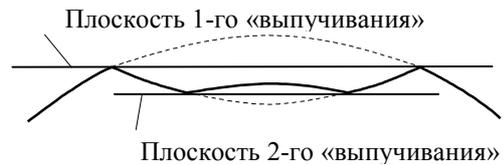


Рис. 21

- изгибание изометрическое;
- контур оболочки закреплен;
- схема деформации – «зеркальное выпучивание»;
- нагрузка – распределенная;
- моделируемая сеть – геодезическая,

то, используя интегральную модель кривой (в рассматриваемом случае – главный меридиан отсека сферической поверхности), можно смоделировать динамику процесса деформации оболочки как деформацию интегральной модели. В данном случае вариационный принцип реализуется таким образом, что суммарная площадь интегральной модели кривой (в энергетической интерпретации) и нагрузки есть величина постоянная (рис. 22). Так как ИМК однозначно определяет форму кривой, получаем деформированный меридиан оболочки.

На рис. 23 представлены несколько фаз процесса деформации сферической оболочки.

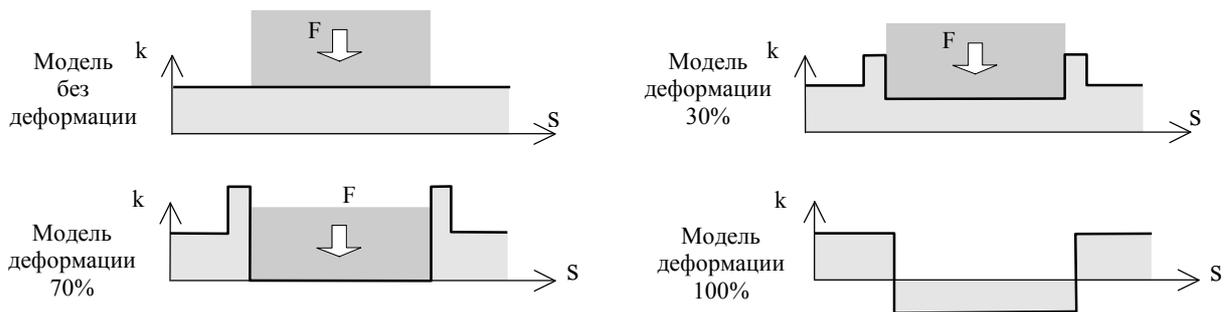


Рис. 22

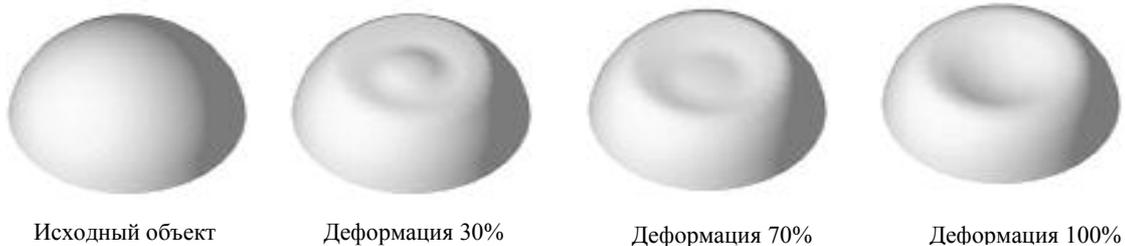


Рис. 23

Заключение

Разработана теория и технология глобальной дискретизации графической информации, обеспечивающая возможность конструирования кривых и поверхностей в дискретной форме с наперед заданной размерностью каркасов. Некоторые примеры практического применения предложенных методов изложены в двух специальных докладах данной конференции. За рамками доклада осталось решение в дискретной форме траекторных задач

реалистичного моделирования динамики движений виртуальных объектов.

Об авторе

Ли Валерий Георгиевич, зав. кафедрой инженерной графики и компьютерного дизайна Таганрогского государственного радиотехнического университета, д.т.н., проф. Тел. (863-4) 37-17-94.

E-mail: egf@tsure.ru;
otdel15@tppark.ru