

# Методы интегрирования дифференциальных уравнений в задаче моделирования поведения ткани методом частиц

Владимир В. Ландовский  
Новосибирский Государственный Технический Университет,  
Новосибирск, Россия  
warlock@asu.cs.nstu.ru

## Аннотация

В работе на основе метода частиц с учетом деформационных свойств разработана дискретная модель ткани и алгоритмы для моделирования поведения ткани на поверхности твердого многогранного объекта. Проведен сравнительный анализ эффективности различных методов интегрирования. Приведены результаты моделирования.

**Ключевые слова:** моделирование ткани, метод частиц, энергетические функции, физические свойства ткани, шаг интегрирования, точность, устойчивость.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Моделирование поведения ткани при драпировке появилось в списке компьютерных приложений сравнительно недавно. Как будет выглядеть ткань с определенными свойствами на определенном объекте? Как с изменением свойств ткани изменится ее драпировка? Ответы на эти и другие вопросы в наглядной форме и должно давать компьютерное моделирование ткани.

Одна из проблем в этой области связана с уникальностью тканых материалов. Всегда было ясно, что тканые материалы имеют свойства, которые позволяют им деформироваться в значительной степени по-другому, чем листы других материалов, например, бумаги или металлической фольги. Особые возможности деформации ткани были отмечены и известны всегда, но не были никогда полностью поняты с научной или инженерной точки зрения.

На сегодняшний день существует ряд работ посвященных этой проблеме [1], [7]. Однако вопросам выбора той или иной схемы аппроксимации дифференциальных уравнений, описывающих поведение ткани, уделяется недостаточное внимание.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В ткани тонкие волокна скручены в нити, и эти нити более или менее жестко сплетены во взаимосвязанную сеть. Представим модель ткани как систему частиц [6], которые размещены в точках пересечения продольных и поперечных нитей ткани.

Движение системы описывается обобщенными перемещениями  $X_i(t)$ , и на каждом временном слое ищутся положения узлов в пространстве. Таким образом, ткань будет представлять собой механическую систему с тремя степенями свободы, которая осуществляет движение относительно устойчивой равновесной формы.

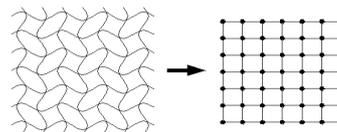


Рис. 1. Дискретная модель ткани.

Из принципа Гамильтона для функции  $L$ , зависящей от координат  $x_i$  и скоростей  $x'_i$ , следует уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial x'_i} \right) = 0$$

Это уравнение определяет динамическую траекторию системы, как только найдена функция Лагранжа для этой системы.

В классической механике лагранжиан определен как разность между кинетической энергией  $T$  и потенциальной энергией  $U$ , то есть  $L = T - U$ .

Весьма важно при определении лагранжиана учесть рассеяние в системе. Для этого необходимо определить функцию  $D$ , зависящую от скорости. Ее называют функцией потерь и определяют как:

$$D = \frac{1}{2} c_i (x'_i)^2$$

Таким образом, уравнение равновесия будет иметь вид:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial x'_i} \right) - \frac{\partial D}{\partial x'_i} = 0$$

Пусть элементарная частица имеет массу  $m_i$ . Кинетическая энергия такой частицы движущейся со скоростью  $x'_i$  будет равна  $T = \frac{1}{2} m_i (x'_i)^2$ .

Потенциальная энергия частицы находящейся в гравитационном поле земли  $U_g = m_i g x_i$ . Однако, полная потенциальная энергия частицы будет включать составляющую, обусловленную взаимодействиями между частицами  $U_{int}$ . Используя выражения для кинетической энергии, функции потерь и гравитационной составляющей получим следующее уравнение движения частицы:

$$m_i x_i'' + c_i x_i' + m_i g + \frac{\partial U_{\text{int}}}{\partial x_i} = 0$$

Для определения  $U_{\text{int}}$  необходимо более подробно рассмотреть деформационные свойства ткани.

### 3. ДЕФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ТКАНИ

Мы предполагаем, что на каждую внутреннюю точку влияют 12 соседних точек [3], так как ткань достаточно легкая и вес ткани в удаленных узлах оказывает пренебрежимо малое влияние на каждую рассматриваемую точку.

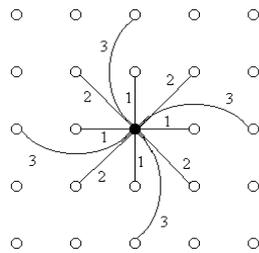


Рис. 2. Типы деформируемых ребер.

На рисунке 3 ребра стягивающие по прямой и определяющие деформации растяжения-сжатия обозначены (1). Энергия

таких связей определяется как  $E_{p,сж} = \frac{kl^2}{2}$ , где  $l$

отклонение от положения равновесия, а  $k$  - коэффициент жесткости связи между соответствующими узловыми точками.

Можно также предположить наличие других типов взаимодействий, таких как сдвиг и изгиб [2] на рисунке это связи (2) и (3) соответственно.

Энергия изгиба [4] обусловлена изгибом нитей относительно плоскости окружающей ткани. Энергия изгиба:

$E_u = \mu_u \cos^2(\theta/2)$ , где  $\theta$  - угол изгиба,  $\mu_u$  - линейный коэффициент изгиба.

Энергия сдвига обусловлена изгибом вокруг нити в плоскости пересечения. Эта часть энергии обуславливает  $S$

- форму нити. Энергия сдвига:  $E_{сдв} = \mu_{сдв} \frac{l_1 l_2}{2} \phi^2$ , где

$\mu_{сдв}$  - линейный коэффициент сдвига,  $l_1, l_2$  - смежные ребра деформируемой ячейки,  $\phi$  - угол сдвига.

Использование таких энергетических функций даже с интуитивно выбранными количественными зависимостями может давать удовлетворительные результаты при моделировании ткани. Для представления конкретной ткани нужно построить эти функции энергии, основываясь на существующих измерительных системах физических свойств тканей.

Общая энергия деформаций ткани может быть определена как [11]  $U_{\text{int}} = E_{p,сж} + E_{сдв} + E_u$ .

Таким образом, последняя составляющая уравнения движения, представляет собой некоторую функцию координат узла  $x_i$  и координат  $x_j$   $j \in R$  где  $R$  - множество пар индексов связанных узлов [3]. В физическом смысле  $F_{\text{int}}(x_i, x_j)$  это результирующая сила внутренних взаимодействий. Тогда уравнение движения узла примет следующий вид:

$$m_i x_i'' + c_i x_i' + m_i g + F_{\text{int}}(x_i, x_j) = 0$$

или для всей системы

$$Mx'' + Cx' + Mg + F_{\text{int}}(x) = 0,$$

где  $M$  матрица инерции - диагональная матрица, описывающая распределение масс ткани,  $C$  матрица демпфирования,  $x = \{x_i\}$ .

Разрешив уравнение относительно  $x''$  и сгруппировав в правой части все силы, действующую на систему частиц, получим полную систему дифференциальных уравнений:

$$x'' = M^{-1}F(x, x'),$$

где  $F(x, x')$  - функция, описывающая действие внутренних и внешних сил на ткань.

Начальные условия:  $x|_{t_0} = x_0$ ,  $x'|_{t_0} = 0$ ,  $F_{\text{int}}|_{t_0} = 0$ ;

краевые условия:  $x'|_S = 0$ , где  $S$  - поверхность твердого тела.

Введем обозначение  $v = x'$ . И перепишем систему уравнений следующим образом:

$$\begin{aligned} x' &= v \\ v' &= M^{-1}F(x, v) \end{aligned} \quad (1)$$

### 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

В процессе перехода от математического описания к алгоритму программы моделирования непрерывные функции заменяются их значениями в дискретные моменты времени.

Выбор того или иного метода интегрирования зависит от четырех основных критериев: согласованность, точность, устойчивость и эффективность [6].

Алгебраическая аппроксимация дифференциального уравнения согласована с дифференциальным уравнением, если она переходит в это уравнение в пределе бесконечно малого шага. Рассмотренные в этой статье методы удовлетворяют критерию согласованности.

В силу того, что число частиц велико, ограничимся рассмотрением методов, в которых необходимо одно вычисление правой части на один шаг интегрирования.

#### 4.1 Явные методы

Наиболее простым является метод Эйлера, применение этого метода приведет к следующей системе алгебраических соотношений

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= hv_n \\ v_{n+1} - v_n &= hM^{-1}F(x_n, v_n) \end{aligned} \quad (2)$$

Выразим скорость из первого уравнения  $v_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{h}$ ,

тогда получим

$$\frac{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}{h^2} = \frac{F(x_n, v_n)}{m}$$

пусть  $X$  является решением т.е.  $\frac{d^2 X}{dt^2} = FM^{-1}$

Тогда погрешность на временном слое  $n$ ,  $\delta^n$  определим следующим образом

$$\frac{X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n}{h^2} = \frac{F(X_n, v_n)}{m} - \delta^n$$

разложив  $X_{n+1}$  и  $X_{n+2}$  в ряд Тейлора около точки

$$X_n = X(t_n),$$

получим:

$$\frac{F(X_n, v_n)}{m} - \delta^n = \frac{3}{2} \frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{10h}{6} \frac{d^3 X}{dt^3} + \dots$$

Этот метод имеет первый порядок точности, т.е. погрешность аппроксимации на временном слое  $n$  имеет порядок  $h$   $\delta^n \sim h$ .

Однако необходимо также учитывать распространение погрешностей [9]. В случае, когда даже малая погрешность, внесенная на некоторой стадии расчета, накапливается – численная схема становится неустойчивой. Возникновение неустойчивости связано с наличием нефизического решения дискретных уравнений. Нас интересует зависимость устойчивости метода от изменения шага интегрирования. Для схемы Эйлера запишем уравнение эволюции погрешностей.

$$\varepsilon_{n+2} - 2\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n = \varepsilon_n \left( \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=X_n} \frac{h^2}{m} \right) =$$

$$= \frac{1}{m} \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\max} h^2 \varepsilon_n = -\Omega^2 h^2 \varepsilon_n$$

Модуль и отрицательный знак возникают из предположения, что решение имеет ограниченный вид, т.е.  $X_n$  никогда не превзойдет некоторого значения.

Уравнение линейно по  $\varepsilon$  и всегда имеет решения в виде  $\varepsilon_n = \lambda^n = \exp(i\omega n h)$ , подставив это решение, получим

квадратное уравнение  $\lambda^2 + \lambda + 1 = -\Omega^2 h^2$ , решениями которого служат две характеристические функции

$$\lambda_{\pm} = 1 \pm \sqrt{-\Omega^2 h^2},$$

полностью определяющие поведение решения уравнения эволюции погрешностей. Если  $|\lambda_{\pm}|$  или

$|\lambda_{-}|$  больше единицы то накопление погрешности происходит экспоненциально и, в конечном счете, она забивает решение.

Легко видеть, что если  $(\Omega h)^2 > 1$  метод становится неустойчивым.

Понятно, что применение такого метода требует выбора настолько малых значений  $h$ , что количество итераций, необходимое для получения результата, возрастает до недопустимых значений.

Рассмотрим другой вариант аппроксимации уравнений (1)

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= hv_{n+1} \\ v_{n+1} - v_n &= hM^{-1}F(x_n, v_n) \end{aligned} \quad (3)$$

$$v_{n+1} = \frac{x_{n+1} - x_n}{h}$$

откуда

$$\frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{h^2} = \frac{F(x_n, v_n)}{m}$$

используя подход аналогичный тому, который применили к классической схеме Эйлера, получим  $\delta^n \sim h^2$ .

Проанализируем устойчивость

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = -\lambda \cdot \Omega^2 h^2$$

$$\Rightarrow \lambda_{\pm} = 1 - \frac{\Omega^2 h^2}{2} \pm \frac{\Omega^2 h^2}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{\Omega^2 h^2}}$$

Метод устойчив пока  $\Omega h \leq 2$ , таким образом мы получили более выгодную аппроксимацию, не требующую дополнительных вычислительных затрат.

Строго говоря, такой метод уже можно назвать неявным, так как для вычисления  $x_n$  используется  $v_{n+1}$ , однако для

вычисления  $v_{n+1}$  не требуется решать никаких алгебраических уравнений, а достаточно пересчитать скорость до пересчета положения.

Попробуем добиться еще большего увеличения устойчивости и перейдем к неявным методам интегрирования, в которых значение  $F$  будет определяться в точке  $(x_{n+1}, v_{n+1})$ .

## 4.2 Неявные методы

Для начала рассмотрим следующую систему алгебраических соотношений:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= hv_{n+1} \\ v_{n+1} - v_n &= hM^{-1}F(x_{n+1}, v_{n+1}) \end{aligned} \quad (4)$$

Исходя из  $\frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{h^2} = \frac{F(x_{n+1}, v_{n+1})}{m}$  и того, что

обе точки  $x_{n-1}$  и  $x_n$  находятся левее  $x_{n+1}$ , можно доказать что  $\delta_n \sim h$

Уравнение эволюции погрешностей будет иметь вид

$$\varepsilon_{n+1} - 2\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} = -\Omega^2 h^2 \varepsilon_{n+1}$$

Тогда

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = -\lambda^2 \cdot \Omega^2 h^2 \Rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{-\Omega^2 h^2}}{1 + \Omega^2 h^2}.$$

Можно сделать вывод, что устойчивость этого метода не зависит от выбора шага. Несмотря на то, что метод имеет всего лишь первый порядок точности, погрешность, внесенная на некотором шаге, не накапливается.

Попытаемся увеличить точность, заменив  $v_{n+1}$  на  $v_n$  в первом уравнении

$$\frac{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}{h^2} = \frac{F(x_{n+1}, v_{n+1})}{m}$$

В этом случае точность действительно увеличится, так как точки  $x_n$  и  $x_{n+2}$  находятся слева и справа от  $x_{n+1}$ , но, выиграв в точности, мы получим такое же ограничение на шаг со стороны устойчивости, как и в методе (3).

Другим не менее важным критерием выбора метода интегрирования является эффективность.

### 4.3 Эффективность

Эффективность оценивается исходя из двух характеристик: количества вычислений приходящегося на один шаг метода, т.е. времени и количества промежуточных результатов, т.е. дополнительного объема памяти.

Очевидно, что первый из предложенных явных методов уступает второму, при тех же самых необходимых объемах памяти и вычислений. Поэтому в дальнейшем мы не будем его рассматривать. Из неявных методов следует выбрать для дальнейшего рассмотрения первый, так как точность и устойчивость второго такая же, как у явного метода при превосходящих вычислительных затратах.

Рассмотрим подробнее работу неявного метода (4). Введем обозначения  $v_{n+1} - v_n = \Delta v$ ,  $x_{n+1} - x_n = \Delta x$ , тогда можно переписать систему в виде

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta v \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} v_n + \Delta v \\ M^{-1} F(x_n + \Delta x, v_n + \Delta v) \end{pmatrix}$$

Для нахождения значений положения и скорости необходимо решить систему относительно  $\Delta x$  и  $\Delta v$ , так как уравнения не линейны, решить систему в таком виде задача практически неосуществимая.

Применив разложение  $F$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $F(x_n, v_n)$ , и выполнив аппроксимацию первого порядка, получим.

$$F(x_n + \Delta x, v_n + \Delta v) = F(x_n, v_n) + \frac{\partial F(x, v)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F(x, v)}{\partial v} \Delta v$$

И перейдем к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta v \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} v_n + \Delta v \\ M^{-1} \left( F(x_n, v_n) + \frac{\partial F(x, v)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F(x, v)}{\partial v} \Delta v \right) \end{pmatrix}$$

Подставив в нижнюю строку системы  $\Delta x = h(v_n + \Delta v)$ , получим

$$\Delta v = hM^{-1} \begin{pmatrix} F(x_n, v_n) + \frac{\partial F(x, v)}{\partial v} \Delta v + \\ + \frac{\partial F(x, v)}{\partial x} (v_n + \Delta v) \end{pmatrix}$$

Обозначим за  $I$  – единичную матрицу и, перегруппировав отдельные составляющие, получим уравнение

$$\begin{pmatrix} I - hM^{-1} \frac{\partial F(x, v)}{\partial v} - h^2 M^{-1} \frac{\partial F(x, v)}{\partial x} \end{pmatrix} \Delta v = hM^{-1} \left( F(x_n, v_n) + h \frac{\partial F(x, v)}{\partial x} v_n \right)$$

Перепишем его в виде

$$A \Delta v = b, \quad \text{где } A = M - h \frac{\partial F(x, v)}{\partial v} - h^2 \frac{\partial F(x, v)}{\partial x},$$

$$b = h \left( F(x, v) + h \frac{\partial F(x, v)}{\partial x} v_n \right)$$

Решив систему относительно  $\Delta v$ , найдем  $\Delta x = h(v_n + \Delta v)$

Таким образом, шаг обратного метода состоит в вычислении

$$F(x_n, v_n), \quad \frac{\partial F(x, v)}{\partial v}, \quad \frac{\partial F(x, v)}{\partial x},$$

формировании и решении системы уравнений относительно  $\Delta v$  и последующем обновлении значений  $x$  и  $v$

Особого внимания заслуживает частная производная  $\frac{\partial F(x, v)}{\partial x}$ , для системы с количеством частиц  $N$  это

матрица размера  $3N \times 3N$ , ненулевые элементы которой представляют собой блоки размером  $3 \times 3$ , располагающиеся около главной диагонали и на пересечениях индексов взаимодействующих узлов. Они имеют следующий вид, (положение  $i - 20$  узла обозначим  $X_i$ ) для диагональных элементов:

$$\frac{\partial F_{xi}}{\partial X_i} = \sum_{j \in R} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{xij}}{\partial x_i} & \frac{\partial F_{yij}}{\partial x_i} & \frac{\partial F_{zij}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial F_{xij}}{\partial y_i} & \frac{\partial F_{yij}}{\partial y_i} & \frac{\partial F_{zij}}{\partial y_i} \\ \frac{\partial F_{xij}}{\partial z_i} & \frac{\partial F_{yij}}{\partial z_i} & \frac{\partial F_{zij}}{\partial z_i} \end{pmatrix},$$

где  $x, y, z, F_x, F_y, F_z$  – соответствующие координатные составляющие сил и положения,  $i$  – индекс узла,  $R$  – множество узлов, с которым взаимодействует узел  $i$ ; для остальных элементов:

$$\frac{\partial F_{xi}}{\partial X_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{xij}}{\partial x_j} & \frac{\partial F_{yij}}{\partial x_j} & \frac{\partial F_{zij}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial F_{xij}}{\partial y_j} & \frac{\partial F_{yij}}{\partial y_j} & \frac{\partial F_{zij}}{\partial y_j} \\ \frac{\partial F_{xij}}{\partial z_j} & \frac{\partial F_{yij}}{\partial z_j} & \frac{\partial F_{zij}}{\partial z_j} \end{pmatrix}, j \in R,$$

$\frac{\partial F_{xij}}{\partial X_i}$  - вклад со стороны приращения  $X_i$  в изменение

силы  $F_x$  действующей на  $i$ -тый узел в силу того, что

он связан с  $j$ -тым,  $\frac{\partial F_{xij}}{\partial X_j}$  - вклад со стороны

приращения  $X_j$ , в изменение силы  $F_x$ , действующей на  $i$ -тый узел в силу того, что  $j$ -тый изменил положение.

$\frac{\partial F_{xij}}{\partial y_i} = \frac{\partial F_{yij}}{\partial x_i}$  - для координатных составляющих.

$\frac{\partial F_{xi}}{\partial X_j} = \frac{\partial F_{xj}}{\partial X_i}$  - для взаимодействующих узлов.

Так как матрицы  $M$  и  $\frac{\partial F(x, v)}{\partial v}$  диагональные, то  $A$  так

же как и  $\frac{\partial F(x, v)}{\partial x}$  будет симметричной.

Система решается методом сопряженных градиентов [5] Алгоритм которого выглядит следующим образом.

$$d_0 = r_0 = b - A\Delta v_0$$

$$\alpha_i = \frac{r_i^T r_i}{d_i^T A d_i}$$

$$\Delta v_{i+1} = \Delta v_i + \alpha_i d_i$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i A d_i$$

$$\beta_{i+1} = \frac{r_{i+1}^T r_{i+1}}{r_i^T r_i}$$

$$d_{i+1} = r_{i+1} + \beta_{i+1} d_i$$

Рис. 3. Метод сопряженных градиентов.

Наибольших вычислительных затрат здесь требует операция умножения матрицы на вектор. И в случае если каждая частица взаимодействует со всеми остальными, то такая процедура существенно замедлит работу программы. Если не применять специальных способов хранения и обработки матрицы  $A$ , то зависимость между количеством частиц и временем моделирования будет как на рисунке 4.

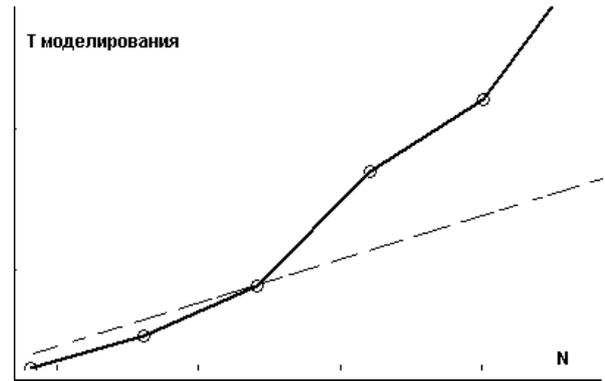


Рис. 4. Зависимость времени моделирования от количества частиц.

Однако, учитывая, что число явно взаимодействующих частиц ограничено, матрица  $A$  будет разреженной, количество ненулевых элементов, которой можно оценить следующим образом  $K \prec (m+1) \cdot N \cdot 9$ , где  $m$  количество связей. Такую матрицу можно хранить по методу CSR (Compressed Sparse Row) [10], используя три массива:  $elem$ , который содержит все ненулевые элементы матрицы  $A$ , перечисленные в строчном порядке,  $jpctr$ , который содержит столько же элементов, сколько  $elem$  и для каждого из них указывает, в каком столбце находится данный элемент. А массив  $iptr$ , хранит число элементов, равное увеличенной на единицу размерности СЛАН. Его  $i$ -й элемент указывает, с какой позиции в массивах и начинается  $i$ -я строка матрицы.

Алгоритм матрично-векторного умножения [8] в таком случае будет иметь вид:

Входные данные :  $r, elem, jpctr, iptr, N$

Результат :  $z = Ar$

Для  $i$  от 1 до  $N$  {

$z[i] = 0$

Для  $j$  от  $jpctr[i]$  до  $jpctr[i+1]-1$  {

$z[i] = z[i] + r[jpctr[j]] \cdot elem[j]$

}}

Рис. 5: Алгоритм матрично-векторного умножения для разреженных матриц, хранимых в структуре CSR.

В этом случае зависимость между количеством частиц и временем моделирования будет как на рисунке 6.

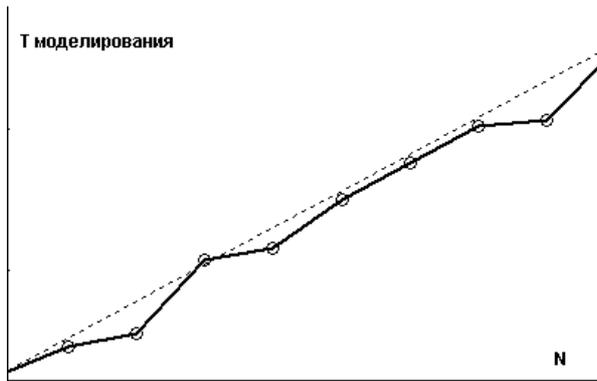


Рис. 6. Зависимость времени моделирования от количества частиц при использовании CSR.

Для явного метода время затраченное на одну итерацию будет в несколько раз меньше по сравнению с неявным, однако количество итераций возрастет, так как шаг ограничен устойчивостью. Зависимость времени моделирования от количества частиц будет линейной, а затраты памяти минимальны, так что явный метод не на много уступает неявному.

#### 4.4 Параллельные вычисления

В связи с тем, что увеличение размерности модели (вызванное сгущением сетки) заметно повышает реалистичность результатов и существенно замедляет процесс моделирования, предполагается повысить скорость процесса моделирования за счет использования параллельных вычислений на нескольких компьютерах объединенных в сеть. Используя особенность явных методов, состоящую в том, что для вычисления значений на некотором временном слое, требуется знать только значения с предыдущего временного слоя, разделим одну итерацию решения системы дифференциальных уравнений между различными компьютерами. Иными словами, несколько приложений, использующих вычислительные ресурсы различных процессоров, будут решать на всю систему дифференциальных уравнений, а только определенную часть. После этого выполняется фаза обмена данными по сети, то есть отправки рассчитанных результатов другим участникам расчета и получения информации от них.

Информационная модель системы, реализующей параллельные вычисления, представлена на рисунке 7.

Применение такого подхода позволяет заметно уменьшить время моделирования, которое можно определить как

$$T_{\text{мод}} = \left( \frac{T_u}{m} - T_k \right) N_u,$$

где  $T_u$  - время одной итерации при моделировании полной модели,  $m$  - количество «серверов вычислений»,  $T_k$  - время необходимое на передачу данных по сети.  $N_u$  - количество итераций.

Как показало тестирование, использование четырех «серверов вычислений» для модели большого размера позволяет более чем втрое сократить время моделирования.

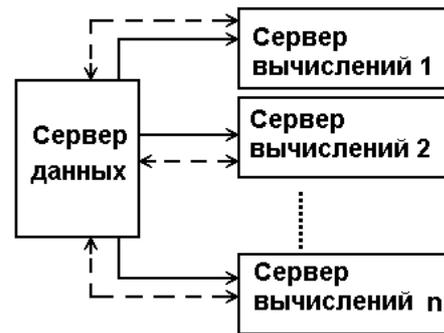


Рис. 7. Информационная модель системы, реализующей параллельные вычисления.

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Численные результаты, доказывающие высказанные выше предположения получены с использованием модели падения ткани Рис. 8. Другой пример представлен на рисунке 9. Рисунки 10 и 11 получены экспортом данных в 3d Studio MAX, и последующей тонировкой.

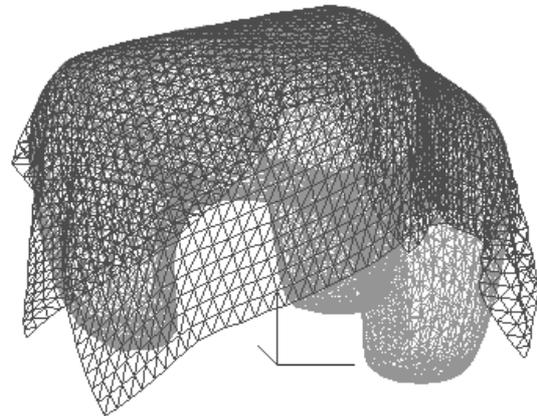


Рис. 8. Результаты моделирования.

Таблица 1 показывает зависимость между временем моделирования и количеством частиц, при использовании неявного метода. Графики на рисунке 4 и рисунке 6 построены по данным таблицы 1. Результаты сравнения явного и неявного методов приведены в таблице 2. При сравнении методов шаг явного метода был выбран на порядок меньше шага неявного метода. Экспериментально проверено, что эти значения шагов являются критическими при данных параметрах модели, т.е. при увеличении шага процесс расходится.

Таблица 1.

Количество частиц		400	800	1200	1600	2000	2400
Время, с.	Без CSR	7	31	69	155	210	327
	С CSR	13	23	28	54	58	75

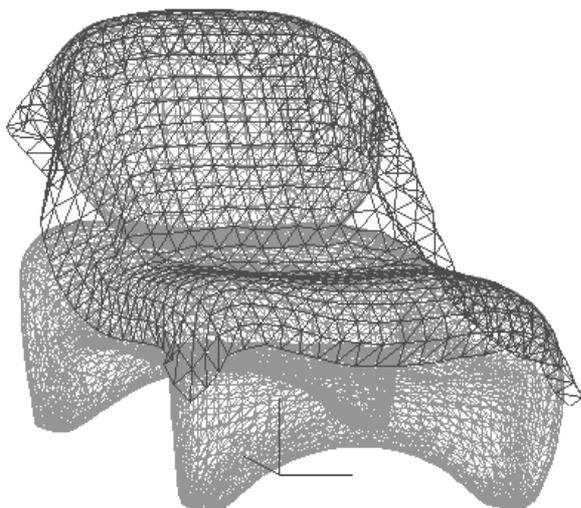


Рис. 9. Результаты моделирования.

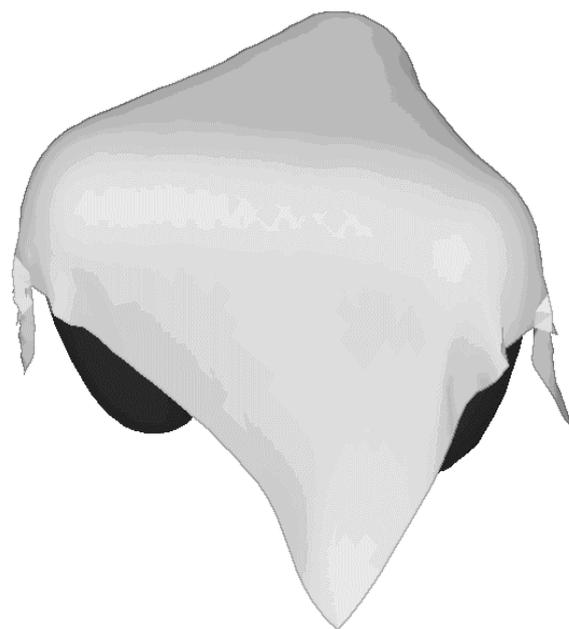


Рис. 11. Результаты моделирования.



Рис. 10. Результаты моделирования.

Таблица 2.

Размерность сетки, Количество частиц		40x40 1600	56x56 3136	69x69 4761	80x80 6400
Время, с.	Явный метод	51	99	153	207
	Неявный метод	159	294	432	564

## 6. БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] David Baraff and Andrew Witkin. *Large steps in cloth simulation. In SIGGRAPH 98 Conference Proceedings, Annual Conference Series, pages 43-54. ACM SIGGRAPH, 1998.*
- [2] Eberhardt A., Weber A., Strasser W. *A fast, flexible, particle-system model for clothes draping. IEEE Computer Graphics and Applications. № 16, 1996. P. 52-59.*
- [3] Frolovsky V. D., Landovsky V. V. *Modeling of fabric based on particles method. Proceedings of the International Forum isiCAD-2004. Novosibirsk. Ledas Ltd. 2004. P. 224-229.*
- [4] Kawabata S., Postle R., Niwa N. *Objective Specification of Fabric Quality, Mechanical Properties and Performance, The Textile Mach. Soc. Japan Publications. 1982.*
- [5] Shewchuk. *An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain. Technical Report CMUCS- TR-94-125, Carnegie Mellon University, 1994.*
- [6] W. Hockney and J. W. Eastwood, *Computer Simulation Using Particles. McGraw-Hill, New York, 1981*
- [7] X. Provot. *Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behavior. In Graphics Interface, pages 147-155, 1995.*
- [8] Баландин М.Ю., Шурина Э.П. *Методы решения СЛАУ большой размерности.. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000.*
- [9] Е.А. Новиков. *Явные методы для жестких систем – Новосибирск: Наука. Сиб. Предприятие РАН, 1997. 195 с..*
- [10] Писсанецки С. *Технология разреженных матриц..М.: Мир, 1988.*
- [11] Фроловский В.Д. *Метод энергетических функций построения квазиразверток поверхностей // Сибирский журнал индустриальной математики. 2000. Том III. №1(5). С. 195-204.*

## Об авторе

Владимир Владимирович Ландовский аспирант кафедры АСУ Новосибирского государственного технического университета. (НГТУ).

email is [warlock@asu.cs.nstu.ru](mailto:warlock@asu.cs.nstu.ru).

## Integration methods in the problem of modelling of fabric based on particles method

### Abstract

This paper describes a fabric simulation system. On the basis of a method of particles in view of physical properties of a fabric the model and the algorithm for modeling behavior of a fabric on a surface of firm object are developed. Comparative analysis of some different integration methods is made. And some results of simulation are given.

***Keywords:** modeling of a fabric, method of particles, power functions, physical properties of a fabric, stability, integration step.*

### About the author

Vladimir Landovsky is a Ph.D. student at Novosibirsk State Technical University, Department of Computer Science. His contact email is [warlock@asu.cs.nstu.ru](mailto:warlock@asu.cs.nstu.ru).