

Разработка и исследование алгоритма построения квазиразвертки поверхности

Е.Н.Павенко, В.Д.Фроловский
Новосибирский Государственный Технический университет
Новосибирск, Россия

Аннотация

В работе рассматривается методология решения задачи развертки поверхности с ненулевой гауссовой кривизной. Предлагаются модели и методы, которые могут использоваться в системах проектирования одежды и корпусных изделий из листового материала.

Ключевые слова: гауссова кривизна, развертываемая поверхность, упругие деформации

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи построения развертки сложных поверхностей возникают в системах конструкторско-технологической подготовки производства различных корпусных изделий из листового материала таких, как одежда, обувь, корпуса турбо-, гидрогенераторов, электрических машин, автомобилей, судов, вентиляционных систем и пр. Причем задача построения развертки может рассматриваться в двух аспектах. Во-первых, собственно построение плоской развертки сложной нелинейной поверхности, а во-вторых, задача подготовки плоской заготовки определенной формы, которая в дальнейшем, путем деформации, превращается в требуемую нелинейную поверхность.

Известные подходы к исследованию рассматриваемой задачи можно разделить на две категории: 1) геометрический, на основе методов дифференциальной геометрии [1, 4]; 2) физический, на основе теории упругопластических деформаций [3]. Однако потребности практики удовлетворены до настоящего времени не в полной мере. Наиболее целесообразным при решении прикладных задач представляется сочетание геометрических методов с учетом физических характеристик деформируемых при развертке материалов.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ЗАДАЧ РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Отображение различных поверхностей на плоскость - типичная задача инженерной геометрии. Формулируется она следующим образом: для заданного сегмента поверхности требуется найти плоскую область такой формы, чтобы из нее путем деформации можно было бы получить исходный сегмент. Такие отображения получили название квазиразверток.

2.1. Развертываемые поверхности

Точные развертки существуют для весьма узкого класса поверхностей. В общем случае приходится строить отображение куска поверхности на плоскую область с искажением длин или углов или того и другого.

В работе рассматривается класс параметрических поверхностей, поскольку такое описание поверхностей наиболее часто используется в настоящее время в системах автоматизированного проектирования. Общий вид такой поверхности, зависящий только от ее геометрии, то есть от расположения опорных точек, по которым строится данная поверхность, имеет вид [2]:

$$Q(u, w) = [U][N][P][N^T][W], \quad (1)$$

где $[U] = [u^3 u^2 u^1]$ и $[W^T] = [w^3 w^2 w^1]$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq w \leq 1$, N - матрица, соответствующая методу описания поверхности (бикубическая поверхность Кунса или поверхность Безье), P - матрица опорных точек, на которых строится поверхность.

Известно, что наиболее просто строится развертка для, так называемой, развертываемой поверхности. Если поверхность развертываемая, то с помощью последовательности небольших поворотов вокруг образующей линии она может быть без растяжений и разрывов развернута или раскрыта в плоскость. Для того, чтобы определить, будет ли поверхность или ее часть развертываемой, необходимо рассмотреть гауссову кривизну этой поверхности. Для развертываемой поверхности гауссова кривизна K в любой точке поверхности равно нулю, т.е. $K=0$. Гауссова кривизна для поверхности в соответствии с [2] определяется как

$$K := \frac{\left(\left(\frac{dQ}{du} \times \frac{dQ}{dw} \right) \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial u^2} \right) \cdot \left(\left(\frac{dQ}{du} \times \frac{dQ}{dw} \right) \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial w^2} \right) - \left(\left(\frac{dQ}{du} \times \frac{dQ}{dw} \right) \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial u \partial w} \right)^2}{\left(\left| \frac{dQ}{du} \times \frac{dQ}{dw} \right| \right)^4} \quad (2)$$

Примеры развертываемых (конус) и неразвертываемых поверхностей (сфера) приведены на рисунках 1 и 2.

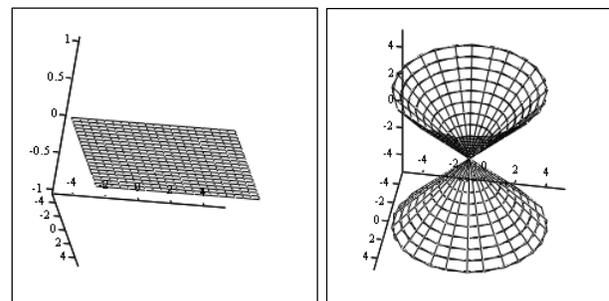
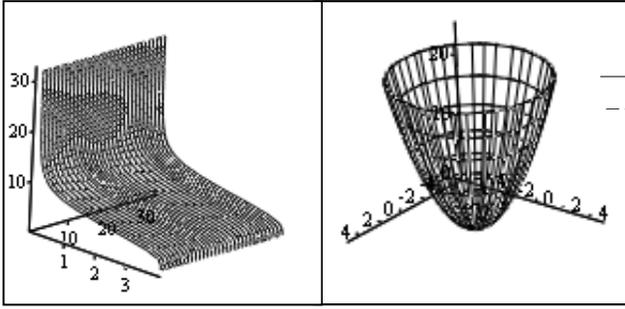


Рис. 1. Значения гауссовой кривизны (k) для развертываемой поверхности (конус (Q)).



zz (Q_x, Q_y, Q_z)

Рис. 2. Значения гауссовой кривизны (zz) неразвертываемой поверхности (эллиптический параболоид (Q_x, Q_y, Q_z))

Использование значений гауссовой кривизны для возможности получения плоской развертки произвольной нелинейной поверхности может служить основой для построения алгоритма получения квазиразвертки поверхности: необходимо разбить поверхность на такие участки, в которых гауссова кривизна имеет нулевое значение. В этом случае все полученные куски поверхности являются развертываемыми, и получение для них плоских заготовок происходило бы с минимальными деформациями исходной поверхности. Исследования показали, что прямое применение данного алгоритма малоэффективно, поскольку отдельные куски поверхности для уменьшения своей гауссовой кривизны стремятся к минимальным размерам и в пределе стягиваются в точку.

Для предотвращения такой аномалии предложенного выше алгоритма предложено использовать дополнительные ограничения, связанные с подходами теории деформации и упругости, а именно - учет энергетических затрат на выполнение деформации исходной поверхности.

2.2 Метод энергетических функций

Обозначим через S - трехмерную поверхность, заданную набором трехмерных точек, N - количество точек сети по горизонтали, M - количество точек по вертикали, через $P_{i,j}$ - точку трехмерной сети, стоящую на пересечении i -й горизонтали и j -й вертикали, где $i=1, \dots, N$; $j=1, \dots, M$. Каждая трехмерная точка сети $P_{i,j}$ имеет соответственно 3

координаты: $(x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j})$. Через $\overline{P_{i,j}, P_{k,l}}$ - обозначим вектор, проходящий через две точки: $P_{i,j}$ и $P_{k,l}$.

Введем обобщенную функцию для углового сдвига:

$$B(P_{i,j}) = \sum_{r=1,2,3,4} \Theta_r(P_{i,j}), \text{ где}$$

$$\Theta_1(P_{i,j}) = \left[\frac{(\overline{P_{i,j-1}P_{i,j}} \cdot \overline{P_{i,j}P_{i-1,j}})}{(|\overline{P_{i,j-1}P_{i,j}}| * |\overline{P_{i,j}P_{i-1,j}}|)} \right],$$

$$\Theta_2(P_{i,j}) = \left[\frac{(\overline{P_{i-1,j}P_{i,j}} \cdot \overline{P_{i,j}P_{i,j+1}})}{(|\overline{P_{i-1,j}P_{i,j}}| * |\overline{P_{i,j}P_{i,j+1}}|)} \right],$$

$$\Theta_3(P_{i,j}) = \left[\frac{(\overline{P_{i,j-1}P_{i,j}} \cdot \overline{P_{i,j}P_{i+1,j}})}{(|\overline{P_{i,j-1}P_{i,j}}| * |\overline{P_{i,j}P_{i+1,j}}|)} \right],$$

$$\Theta_4(P_{i,j}) = \left[\frac{(\overline{P_{i+1,j}P_{i,j}} \cdot \overline{P_{i,j}P_{i,j+1}})}{(|\overline{P_{i+1,j}P_{i,j}}| * |\overline{P_{i,j}P_{i,j+1}}|)} \right]$$

Введем функцию изгиба $T(P_{i,j}) = \sum_{r=1,2,3,4} \Psi_r(P_{i,j})$, где:

$$\Psi_1(P_{i,j}) = \left[\frac{(\overline{P_{i-1,j}P_{i,j}} \cdot \overline{P_{i,j}P_{i+1,j}})}{(|\overline{P_{i-1,j}P_{i,j}}| * |\overline{P_{i,j}P_{i+1,j}}|)} \right],$$

$$\Psi_2(P_{i,j}) = \left[\frac{(\overline{P_{i,j-1}P_{i,j}} \cdot \overline{P_{i,j}P_{i,j+1}})}{(|\overline{P_{i,j-1}P_{i,j}}| * |\overline{P_{i,j}P_{i,j+1}}|)} \right].$$

$$\Psi_3(P_{i,j}) = \left[\frac{(\overline{P_{i+1,j+1}P_{i,j}} \cdot \overline{P_{i,j}P_{i-1,j-1}})}{(|\overline{P_{i+1,j+1}P_{i,j}}| * |\overline{P_{i,j}P_{i-1,j-1}}|)} \right]$$

$$\Psi_4(P_{i,j}) = \left[\frac{(\overline{P_{i-1,j+1}P_{i,j}} \cdot \overline{P_{i,j}P_{i+1,j-1}})}{(|\overline{P_{i-1,j+1}P_{i,j}}| * |\overline{P_{i,j}P_{i+1,j-1}}|)} \right]$$

Предположим, что наша поверхность под действием каких-либо сил была подвержена деформации, в результате которой мы получили изменение длин координатных линий и углов между ними. Обозначим через $R(P_{i,j}, P_{k,l})$ растяжение, а $S(P_{i,j}, P_{k,l})$ - сжатие сети между точками $P_{i,j}$ и $P_{k,l}$. Энергии, обусловленные растяжением и сжатием соответственно обозначим через:

$$E_p = \sum_{|i-k|=1, |j-l|=1} \Omega_1(R(P_{i,j}, P_{k,l})),$$

$$E_{сж} = \sum_{|i-k|=1, |j-l|=1} \Omega_2(S(P_{i,j}, P_{k,l})).$$

Вид функционалов Ω_1 и Ω_2 выбирается исходя из конкретной энергетической модели деформаций для различных материалов.

Через $B(P_{i,j})$ - обозначим суммарный угловой сдвиг, образованный четырьмя углами в точке $P_{i,j}$ между вертикальными и горизонтальными линиями сети. Тогда энергия сдвига определяется как:

$$E_{сдв} = \sum_{i=1, N, j=1, M} \Omega_3(B(P_{i,j})).$$

Изгиб обозначим через: $T(P_{i,j})$, а энергию изгиба через:

$$E_u = \sum_{i=1, N, j=1, M} \Omega_4(T(P_{i,j})).$$

В конечном итоге мы можем получить общую деформационную энергию:

$$E_o = E_p + E_{сж} + E_{сдв} + E_u. \quad (3)$$

Для получения полной развертки мы можем воспользоваться несколькими подходами в зависимости от принятых предположений.

2.3 Деформационные модели частного вида

Рассмотрим простейшую модель, в которой будут учитываться только деформации растяжения-сжатия, на которые накладываются ограничения, обусловленные свойствами материала. Тогда формула для общей энергии деформации примет вид: $E_o = E_p + E_{сж}$.

В данном приближении мы можем для удобства объединить энергии растяжения и сжатия в одну формулу. Предварительно введем некоторые обозначения:

$P'_{i,j}$ - точка $P_{i,j}$ после деформации,
 $l(P_{i,j}, P_{k,l}) = |P'_{i,j}P'_{k,l}| - |P_{i,j}P_{k,l}|$ - удлинение вектора $\overline{P_{i,j}P_{k,l}}$ при деформации, $\sigma(P_{i,j}, P_{k,l})$ - напряженность, определяемая из закона Гука: $\sigma(P_{i,j}, P_{k,l}) = \mu * l(P_{i,j}, P_{k,l})$, где μ - модуль Юнга.

Таким образом, формула для деформационной энергии примет вид:

$$E_o = \frac{1}{2} * \sum_{\substack{|i-k|=1, |j-l|=1 \\ i=k, |j-l|=1}} (\sigma(P_{i,j}, P_{k,l}) * l(P_{i,j}, P_{k,l})) = \frac{1}{2} * \mu * \sum_{\substack{|i-k|=1, |j-l|=1 \\ i=k, |j-l|=1}} l^2(P_{i,j}, P_{k,l})$$

Нам необходимо найти минимум этой функции. Так как искомая развертка располагается на плоскости, то, следовательно, вершины ее сети - суть двумерные точки, т. е. зависят только от двух координат: u и v . Продифференцируем E_o по этим координатам и тем самым получим систему уравнений вида:

$$A * \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} = B$$

Здесь A - матрица коэффициентов, полученных при дифференцировании функции E_o , \bar{u} и \bar{v} векторы неизвестных координат искомой развертки, а B - значения исходных величин растяжения и сжатия, вычисленные на трехмерной модели.

В качестве второго примера рассмотрим модель упругопластического материала. Она будет включать в себя как растяжения-сжатия, так и угловой сдвиг.

Обозначим через $l_u(P_{i,j}, P_{i,l}) = |P'_{i,j}P'_{i,l}| - |P_{i,j}P_{i,l}|$ - удлинение в горизонтальной, а $l_v(P_{i,j}, P_{k,j})$ - в вертикальной плоскости, $\tau_{uv}(P_{i,j}) = \Theta'(P_{i,j}) - \Theta(P_{i,j})$ - угловой сдвиг, η - коэффициент Пуассона. В этом случае формула для общей деформационной энергии уже не будет иметь следующий вид:

$$E_o = \frac{\mu}{2 * (1 + \eta)} * \sum_{\substack{|i-j|=1, |k-l|=1 \\ i=l, |k-j|=1}} \left[\frac{(\eta * l_u(P_{i,j}, P_{i,l}) + l_v(P_{i,j}, P_{k,j})) * l_u(P_{i,j}, P_{i,l})}{1 - \eta} + \frac{(\eta * l_v(P_{i,j}, P_{i,l}) + l_u(P_{i,j}, P_{k,j})) * l_v(P_{i,j}, P_{i,l})}{1 - \eta} \right] + \tau_{uv}(P_{i,j}) \quad (4)$$

Для нахождения ее минимума уже необходимо использовать оптимизационные процедуры.

Особыми деформационными свойствами обладают тканые материалы. Для них функции растяжения и сжатия можно записать в виде:

$$R(P_{i,j}, P_{k,l}) = \begin{cases} \left[\frac{\{ |P'_{i,j}, P'_{k,l}| - |P_{i,j}, P_{k,l}| \}^2}{|P'_{i,j}, P'_{k,l}|} \right], & |P'_{i,j}, P'_{k,l}| < |P_{i,j}, P_{k,l}| \\ 0, & |P'_{i,j}, P'_{k,l}| \geq |P_{i,j}, P_{k,l}| \end{cases} \quad (5)$$

$$S(P_{i,j}, P_{k,l}) = \begin{cases} 0, & |P'_{i,j}, P'_{k,l}| \leq |P_{i,j}, P_{k,l}| \\ \left[\frac{\{ |P'_{i,j}, P'_{k,l}| - |P_{i,j}, P_{k,l}| \}^2}{|P'_{i,j}, P'_{k,l}|} \right], & |P'_{i,j}, P'_{k,l}| > |P_{i,j}, P_{k,l}| \end{cases} \quad (6)$$

Угловой сдвиг можно определить как:

$$B_r(P_{i,j}) = \left[\frac{\{ \Theta'_r(P_{i,j}) - \Theta_r(P_{i,j}) \}^2}{\Theta'_r(P_{i,j})} \right]$$

что в сумме для каждой точки даст выражение:

$$B(P_{i,j}) = \sum_{r=1,2,3,4} B_r(P_{i,j}).$$

Энергия сдвига:

$$E_{сдв} = \sum_{i=1, N, j=1, M} B(P_{i,j}) \quad (7)$$

Изгиб можно определить по следующей формуле:

$$T_r(P_{i,j}) = \frac{\{ \Theta'_r(P_{i,j}) - \Theta(P_{i,j}) \}^2}{\Theta'_r(P_{i,j})}$$

что в сумме для каждой точки даст выражение:

$$T(P_{i,j}) = \sum_{r=1,2} T_r(P_{i,j})$$

Тогда энергия изгиба определяется как

$$E_u = \sum_{i=1, N, j=1, M} T(P_{i,j}) \quad (8)$$

В последних двух моделях для нахождения оптимальной двумерной формы используем метод градиентного спуска в модификации Флетчера-Ривса. Заметим, что прямолинейное его применение к энергетической функции приводит к следующей проблеме: деформации могут превысить пороговые значения, при которых в реальных материалах образуются разрывы и трещины. Чтобы учесть это вводятся ограничения на линейные и угловые деформации в виде

штрафных функций. Окончательно минимизируемый функционал примет вид:

$$F(u(P_{i,j}), v(P_{i,j})) = E_0 + \sum_r H_r$$

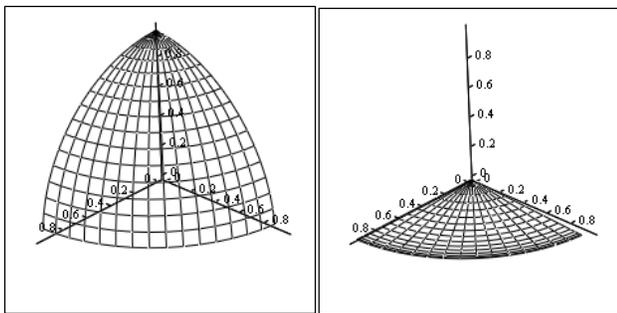
Здесь H_r - ограничения неравенства вида:

$$H_r(l_v(P_{i,j}, P_{k,j}), l_u(P_{i,j}, P_{i,l}), \tau_{uv}(P_{i,j})) \leq H_{r \text{ доп.}}$$

где $H_{r \text{ доп.}}$ - допустимые значения деформаций, $i=1, \dots, N$, $j=1, \dots, M$.

3. ТЕХНОЛОГИЯ ПОСТРОЕНИЯ КВАЗИ-РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Первый этап состоит в разбиении поверхности на конструктивные модули, по границам которых проходят линии швов. Это разбиение производится либо в автоматическом режиме в соответствии с кривизной разворачиваемой поверхности, либо предметным специалистом в интерактивном режиме. Если полученные модули не относятся к классу разворачивающихся поверхностей, то они разбиваются на более мелкие секции, ограниченные линиями горизонтальных сечений. По построению эти секции могут быть с любой наперед заданной точностью аппроксимированы базовыми, разворачивающимися поверхностями. На втором этапе оцениваются энергетические затраты на деформацию полученных на первом этапе разворачивающихся поверхностей и свойств полученных поверхностей в смысле их сопряжения по швам. Процесс построения развертки с использованием рассмотренной выше математической модели является интерактивным и итерационным. При этом конструктор на каждом из этапов конструирования развертки поверхности имеет возможность изменить способ разбиения исходной поверхности на куски, оценить, гауссову кривизну каждого куска поверхности, энергетические затраты на получение плоских разверток этих кусков.



(qx, qy, qz)

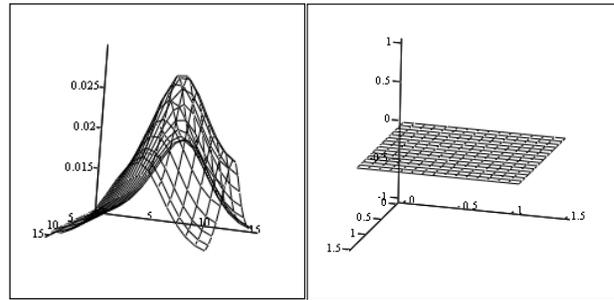
(qx, qy, qz)

Рис. 3. Вариант получения плоской развертки 1/4 части сферы

На рис 3. показан вариант использования описанного выше алгоритма получения плоской развертки 1/4 части сферы. Требование получения нулевого значения гауссовой кривизны для каждого из участков исходной поверхности в этом примере выполняется безусловно. Но учет энергетических затрат в соответствии с (3) на получение развертки данным способом показывает, что такой вариант является неприемлемым для большинства материалов.

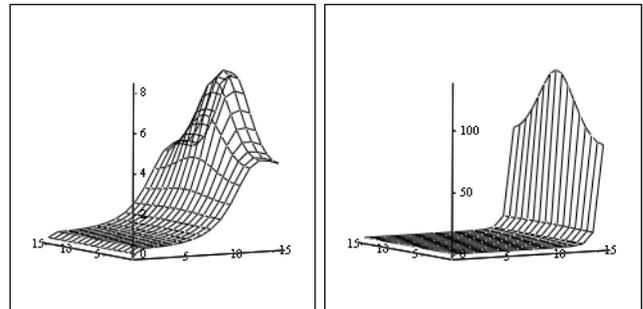
Начальная и конечная гауссова кривизна разворачиваемой четверти сферы представлена на рис.4 .

Значения обобщенных энергетических затрат E_0 в соответствии с (3) и в предположении, что используется линейная форма закона Гука, приведены для каждой точки деформируемой поверхности на рис 5.



zz (qx1, qy1, qz1)

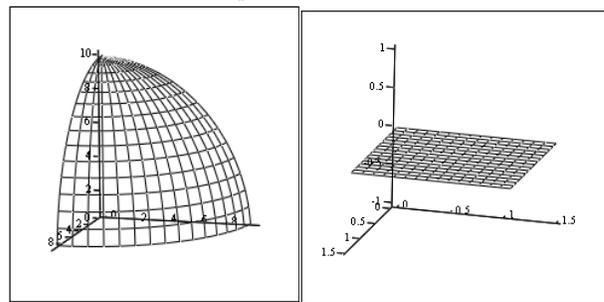
Рис. 4. Изменение значения гауссовой кривизны при получении развертки 1/4 части сферы.



zz zz

Рис. 5. Значения обобщенных энергетических затрат E_0 для каждой точки деформируемой поверхности на разных этапах получения развертки четверти сферы ($z=0.1$ – слева, $z=0.5$ – справа)

Обратная задача получения 1/4 части сферы из плоской заготовки (рис.6) также может быть решена с использованием описанного выше алгоритма.



(qx, qy, qz)

(qx1, qy1, qz1)

Рис. 6. Задача получения 1/4 части сферы из плоской заготовки

Значения гауссовой кривизны в начале и конце процесса получения части сферы из плоской заготовки полностью соответствуют представленным на рис. 4. Для данной задачи определены и рассчитаны значения энергетических затрат для каждого из видов деформаций, которым подвергается исходная плоская заготовка. На рис 7 представлены значения

энергетических затрат на деформации, связанные со сдвигом и изгибом исходной плоской заготовки.

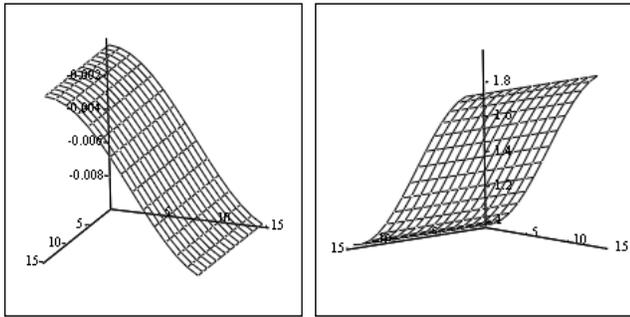


Рис.7. Значения энергетических затрат $E_{сдв}$ (rt) и E_u (rt15) при решении задачи рис.6. для каждой точки поверхности

Значения энергетических затрат на растяжение и сжатие $E_p + E_{сж}$ при получении результирующей нелинейной поверхности из плоской заготовки и обобщенных энергетических затрат E_o представлены на рис. 8.

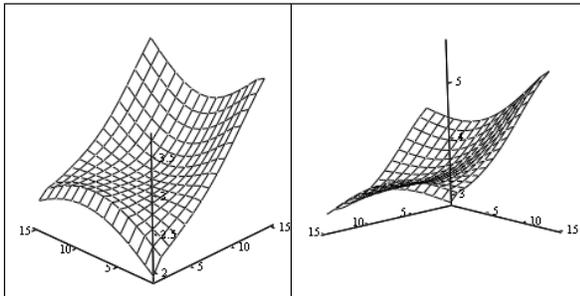


Рис. 8. Значения энергетических затрат на деформацию растяжения и сжатия $E_p + E_{сж}$ (rt11) и обобщенное значение энергетических затрат E_o (rt15) в соответствии с (3)

Анализ представленных на рис. 3-5 результатов позволяет сделать вывод о возможности построения развертки любой поверхности с использованием описанного выше алгоритма. Кроме того, в рамках рассмотренного выше появляется возможность построения монотонного (непрерывного) процесса построения развертки любой нелинейной поверхности, что позволяет исключить возможность превышения пороговых значений, при которых в реальных материалах образуются разрывы и трещины на промежуточных этапах построения развертки.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленный в работе алгоритм получения квазиразвертки сложной поверхности реализован средствами пакета MathCad. При этом полученные и представленные результаты носят, в основном, качественный характер. Дальнейшим развитием этой работы будет создание

законченной программной системы, позволяющей в интерактивном режиме получать и исследовать развертки любых сложных поверхностей, а также контролировать процесс получения развертки на любом из этапов ее построения.

5. БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Завьялов Ю.С., Овчинникова Т. Отображение на плоскость поверхностей, близких к развертывающимся. Вычислительные системы. Вып. 15. 1986. С. 116-125.
- [2] Роджерс Д. Адамс Дж. Математические основы машинной графики. М. Мир. 2006.
- [3] Каюк Я.Ф. Геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек. Киев. Наукова думка. 1987.
- [4] Чебышев П.Л. О кройке одежды. Успехи математических наук. 1946. Т.1. №2. с.38-42.

Об авторах

Фроловский Владимир Дмитриевич – д.т.н., зав. кафедрой Автоматизированных систем управления Новосибирского Государственного Технического университета.

Телефон: 8-383-346-59-15

E-mail: frolovsky@asu.cs.nstu.ru

Павенко Евгений Николаевич – старший преподаватель кафедры Автоматизированных систем управления Новосибирского Государственного Технического университета.

Адрес: Новосибирск, 630092, пр.К.Маркса, 20, НГТУ,

кафедра Автоматизированных систем управления.

Телефон: 8-383-346-11-00

E-mail: epav@ngs.ru

Development and research of algorithm of construction unfolding surfaces

Abstract

In work the methodology of the decision of a problem of unfolding of a surface with nonzero gauss curvature is considered. Models and methods which can be used in systems of designing of clothes and case products from a sheet material are offered.

Keywords: *gauss curvature, a developed surface, elastic deformations*

About the author(s)

Frolovsky Vladimir Dmitrievich - the professor Dr.Sci.Tech., Faculty of the Automated control systems of Novosibirsk State Technical university.

The phone: 8-383-346-59-15

E-mail: frolovsky@asu.cs.nstu.ru

Pavenko Eugeny Nikolaevich - the senior teacher of faculty of the Automated control systems of Novosibirsk State Technical university.

The address: Novosibirsk, 630092, Pr. K.Marksa, 20, НГТУ, 7-th educational case, faculty AVTF, faculty of the Automated control systems.

The phone: 8-383-346-11-00

E-mail: epav@ngs.ru