

# Оценка параметров и прогноз движения вращающегося объекта имеющего трохоидальную траекторию по видеоизображению

С.В. Карамов

ЗАО «Научно-технический центр ЭЛИНС», Зеленоград, Россия

sergkar@mail.ru

## Аннотация

В статье рассматриваются метод определения параметров траектории перемещающегося и вращающегося объекта, имеющего источник излучения, по последовательности видеокадров. На плоскости подобные траектории приближаются к трохоидальным. Проводится анализ получаемых трохоидальных траекторий как идеализированных, так и зашумленных, а также в условиях отсутствия части измеренных координат. Предлагается алгоритм определения параметров траекторий подобных объектов обеспечивающий сглаживание координат, а также их прогнозирование во времени при пропадании изображения источника излучения.

**Ключевые слова:** трохоидальная траектория, вращающийся объект, сглаживание координат, прогнозирование координат.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В разнообразных задачах слежения и управления двигающимися объектами, необходимо по полученному видеоизображению определять текущую траекторию движения для ее сглаживания и выдачи измеренных или экстраполированных координат на дальнейшую обработку [1,2]. В статье рассматриваются объекты, движение которых возможно разложить на сумму поступательного и вращательного. Причем поступательное движение определяется траекторией перемещения центра вращения и может иметь сложное движение. Траектории образуемые в результате подобного движения называются трохоидальными, поскольку на плоскости они представляют функцию – обобщенную трохоиду. Предполагается что на объекте существует источник излучения, координаты центра которого можно принять за реперную точку по которой проводится дальнейший траекторный анализ. В случае отсутствия источника излучения на объекте, за реперную точку можно взять любой малый участок объекта максимально удаленный от центра вращения.

Входом для алгоритма являются измеренные каким-либо образом координаты центра источника излучения (реперной точки) и сигнал потери источника, означающий необходимость прогнозирования выходных координат. Выходом алгоритма являются сглаженные текущие либо экстраполированные координаты источника излучения. На рис. 1 показан пример идеальной трохоидальной траектории, зашумленной, а также траектории поступательного движения центра вращения.

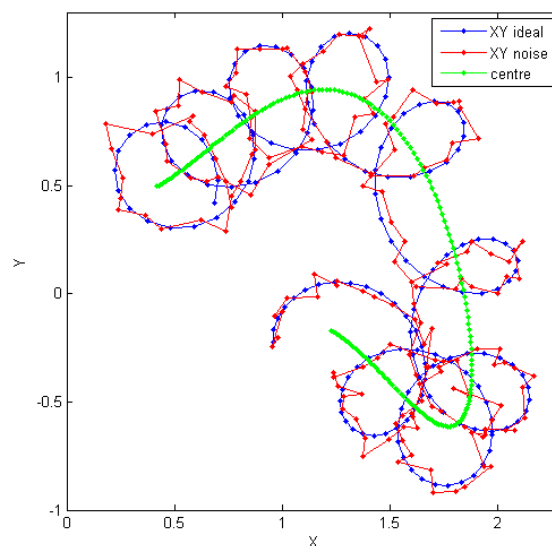


Рис. 1. Пример траектории объекта на плоскости

Будем рассматривать общий случай, в котором траектория имеет неполную информацию о координатах, получаемых при прерывании изображения. Текущие координаты центра вращающегося источника излучения, полученные после обработки одного кадра видеоизображения, представляются в виде:

$$x(t) = x_c(t) + R(t) \cos(\theta(t)) + s_x(t)$$

$$y(t) = y_c(t) + R(t) \sin(\theta(t)) + s_y(t)$$

Где:  $x_c(t), y_c(t)$  – координаты центра вращения;  $R(t)$  – смещение источника излучения относительно центра вращения (радиус вращения);  $\theta(t)$  – фаза вращения;  $s_x(t), s_y(t)$  – шумы измерения. Для сглаживания и прогнозирования необходимо найти составляющие параметры траектории:

$x_0, y_0, v_x, v_y, \omega, R, \theta_0$ . Во многих практических случаях можно принять, что на локальном участке траектории изменение радиуса вращения мало, изменение фазы вращения близко к линейной и траектория центра вращения близка к линейной. Для этого случая проведем анализ траектории при отсутствии шума.

## 2. АНАЛИЗ ТРАЕКТОРИИ

## ИДЕАЛИЗИРОВАННОЙ

Пусть  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  – вектор-функция координат источника. В координатном виде  $\mathbf{r}$  представим:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_x t + R \cos(\omega t + \theta_0) \\ y(t) &= y_0 + v_y t + R \sin(\omega t + \theta_0) \end{aligned} \quad (1)$$

Где:  $x_0, y_0$  – координаты центра вращения;  $v_x, v_y$  – проекции скорости центра вращения;  $\omega(t)$  – циклическая частота вращения;  $\theta_0$  – начальная фаза вращения. Найдем параметры траектории  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ , для чего продифференцируем  $\mathbf{r}(t)$  по времени:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_x - R\omega \sin(\omega t + \theta_0) = R\omega(\xi - \sin(\omega t + \theta_0)) \\ \dot{y}(t) &= v_y + R\omega \cos(\omega t + \theta_0) = R\omega(\eta + \cos(\omega t + \theta_0)) \end{aligned} \quad (2)$$

Где:  $\xi, \eta$  – величины показывающие степень растяжения траектории  $\mathbf{r}(t)$  в горизонтальном либо вертикальном направлениях. Для последующих производных имеем:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -R\omega^2 \cos(\omega t + \theta_0) & \ddot{y}(t) &= R\omega^3 \sin(\omega t + \theta_0) \\ \ddot{y}(t) &= -R\omega^2 \sin(\omega t + \theta_0) & \ddot{x}(t) &= -R\omega^3 \cos(\omega t + \theta_0) \end{aligned} \quad (3)$$

Для определения параметров траектории воспользуемся элементами дифференциальной геометрии.

Радиус кривизны  $\rho$  траектории  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ :

$$\rho = \frac{|\dot{\mathbf{r}}|^3}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|} = \frac{(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})^3}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \quad (4)$$

Координаты центра кривизны  $\delta_x, \delta_y$  (эволюты кривой) траектории  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ :

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \dot{\mathbf{r}} + \rho^2 \frac{d^2 \dot{\mathbf{r}}}{ds^2}, \text{ либо: } \begin{aligned} \delta_x &= \dot{x} - \ddot{y} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \\ \delta_y &= \dot{y} + \ddot{x} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \end{aligned} \quad (5)$$

где:  $ds$  – элемент дуги кривой  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ .

Угловая скорость вращения  $w$  вектора  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  в точках траектории  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  представляется:

$$w = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (6)$$

Текущий фазовый угол разворота вращательной составляющей траектории  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ :

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\dot{y}(t) - \delta_y}{\dot{x}(t) - \delta_x}\right) \quad (7)$$

Подставляя в формулы (4-7) производные (2-3), получим:

$$w = \omega, \quad \rho = R\omega, \quad \delta_x = R\omega\xi = v_x, \quad \delta_y = R\omega\eta = v_y,$$

$$\varphi = \theta_0 + \omega t + \frac{\pi}{2}.$$

Откуда и получаем искомые параметры траектории  $\mathbf{r}(t)$ :

$$\begin{aligned} \omega &= w, R = \frac{\rho}{\omega}, v_x = \delta_x, v_y = \delta_y, \theta_0 = \varphi - \omega t - \frac{\pi}{2} \\ x_0 &= x(t) - \frac{\rho}{\omega} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right), y_0 = y(t) - \frac{\rho}{\omega} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя полученные параметры в (1) можно восстановить теперь искомую траекторию  $\mathbf{r}(t)$  для любого значения времени.

Необходимо заметить, что определять параметры по самой траектории  $\mathbf{r}(t)$  а не по  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ , неприемлемо из-за большой получаемой погрешности. Например, угловая скорость вращения  $w'$  вектора  $\dot{\mathbf{r}}$  относительно  $\mathbf{r}$  представляется:

$$w' = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega \left( \frac{1 + \lambda \sin(\omega t + \theta_0 + \alpha)}{1 + \lambda^2 + 2\lambda \sin(\omega t + \theta_0 + \alpha)} \right)$$

где:  $\lambda = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  – коэффициент растяжения траектории,

$\alpha = -\arctg\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$  – угол указывающий направление

растяжения. В этом случае величина  $\lambda$  определяет точность расчета параметров. При больших  $\lambda$  проявляется значительная методическая погрешность в расчетных параметрах. Например, при  $\lambda = 1$ , имеем:  $w' = \frac{\omega}{2}$ , причем при некоторых  $t$  возникает неопределенность:  $w' = \omega \left(\frac{0}{0}\right)$ .

Применим теперь изложенный подход к обработке зашумленной траектории.

## 3. ОБРАБОТКА ЗАШУМЛЕННОЙ ТРАЕКТОРИИ

Измерение координат источника осуществляется с погрешностью обусловленной такими факторами как: дрожание визирной линии оптической системы, атмосферные флуктуации, искажающие форму и положение изображения, наличие дискретности элементарных ячеек фотоприемника, смаз изображения во время его накопления, погрешность вычисления центра изображения, и др. В виду наличия шума измерения по положению изображения источника, необходимо производить сглаживание входных координат.

Основу предлагаемого метода составляет сглаживание траектории  $\mathbf{r}(t)$ , аппроксимацией ее на локальном участке параметрической кривой с последующим нахождением необходимых производных по коэффициентам приближающей кривой. В виду нормального распределения шума измерения координат  $s_x(t), s_y(t)$ , и относительной простоты, в качестве метода аппроксимации оптимально использовать метод наименьших квадратов. Выбор типа аппроксимирующей двухмерной кривой определяется следующими условиями: отсутствие точек разрыва,

отсутствие точек перегиба. В точках перегиба, как известно,  $\rho = \infty, w = 0$ , что не позволяет правильно вычислить искомые параметры. Будем использовать параметрическое представление кривой, поскольку входные координаты имеют также параметрическое представление. Наиболее простым с вычислительной точки зрения является использование полиномов 2-й степени  $P_2(t)$ , принципиально исключающие появление точек перегиба и удовлетворительно аппроксимирующих куски гармонических функций. Но  $\ddot{P}_2(t) = 0$ , что не позволит вычислить требуемые параметры. В таком случае возможны два варианта, в первом, будем аппроксимировать  $\mathbf{r}(t)$  полиномом  $P_2(t)$ . По  $\dot{P}_2(t)$  получим  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ , которую в свою очередь подвергнем аналогичной аппроксимации с помощью полинома 2-й степени  $Q_2(t)$ . Используя  $\dot{P}_2(t)$ ,  $\dot{Q}_2(t)$  и  $\ddot{Q}_2(t)$  по формулам (8) найдем необходимые параметры траектории  $\mathbf{r}(t)$ .

Во втором варианте, в качестве аппроксимирующей функции возьмем  $P_3(t)$  и по  $\dot{P}_3(t)$ ,  $\ddot{P}_3(t)$ ,  $\ddot{\ddot{P}}_3(t)$ , найдем необходимые параметры траектории  $\mathbf{r}(t)$ . В дальнейшем используются выкладки для второго варианта. Использование в качестве аппроксимирующих функций полиномов четвертой и более степеней не рационально, поскольку увеличивает вычислительную сложность алгоритма и увеличивает минимальное число точек данных  $N_{\min}$  необходимых для успешной аппроксимации. К примеру, при использовании  $P_2(t)$ :  $N_{\min} \geq 3$ , в то время как при использовании  $P_4(t)$ :  $N_{\min} \geq 5$ .

Будем рассматривать момент времени  $t_j$ . Пусть из  $n$  предыдущих кадров имеется  $m$  координат источника, причем  $N_{\min} \leq m \leq n$ . Введем признак наличия достоверных координат  $e_k$ . Кадры, содержащие информацию с достоверными координатами, имеют  $e_k = 1$ , в противном случае  $e_k = 0$ , где  $k = 1, \dots, n$  – номер кадра в текущем анализируемом окне. Причем, необходимо учитывать, что величина  $n$  зависит от частоты и, соответственно, должна адаптивно подстраиваться под текущую частоту вращения. Аппроксимирующие многочлены по каждой из координат представим в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\tau_k) &= a_0 + a_1\tau_k + a_2\tau_k^2 + a_3\tau_k^3, \\ \tilde{y}(\tau_k) &= b_0 + b_1\tau_k + b_2\tau_k^2 + b_3\tau_k^3. \end{aligned}$$

где:  $\tau_k$  – время соответствующее  $k$ -ому кадру в текущем анализируемом окне. Определим расстояние от измеренных координат до аппроксимирующей кривой как:

$$\sigma_k = e_k \sqrt{(x(\tau_k) - \tilde{x}(\tau_k))^2 + (y(\tau_k) - \tilde{y}(\tau_k))^2}$$

Будем минимизировать функцию:

$$\Phi(a_i, b_i) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \rightarrow 0, \text{ для } i = 0, \dots, 3$$

для чего решим систему из восьми уравнений:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b_i} = 0, \quad \text{для } i = 0, \dots, 3$$

По известным формулам [3], рассчитываются коэффициенты  $(a_i, b_i)$ , однозначно определяющие параметрическую кривую на плоскости. Учитывая, что большая точность аппроксимации достигается в средней части аппроксимирующей кривой, нежели на ее концах, для определения оптимальной точки расчета дифференциальных параметров найдем временной центр тяжести точек:

$$p = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n e_k.$$

Параметры траектории  $x_0, y_0, v_x, v_y, \omega, R, \theta_0$  будем искать для момента  $\tau_p$  по (8) подставляя в формулы (4-7) значения  $\tilde{x}, \tilde{\dot{x}}, \tilde{\ddot{x}}, \tilde{\ddot{\ddot{x}}}, \tilde{y}, \tilde{\dot{y}}, \tilde{\ddot{y}}, \tilde{\ddot{\ddot{y}}}$ . При восстановлении параметров траектории для текущего кадра в момент времени  $t_j$ , необходимо учитывать временную задержку  $\tau_a = \tau_n - \tau_p$  вызванную аппроксимацией, учитывая что  $\tau_n = t_j$ . Тогда координаты центра вращения:  $x_c = x_0 + v_x \tau_a, y_c = y_0 + v_y \tau_a$ . Фазовый угол разворота вращательной составляющей:  $\theta(\tau_p) = \theta_0 + \omega \tau_a$ . Для каждого последующего кадра вычисления итеративно повторяются.

Получаемые искомые локальные параметры, несмотря на процедуру аппроксимации  $\mathbf{r}(t)$ , имеют шумовую составляющую. Также, во времени они имеют низкочастотные эволюции, обусловленные изменением центра вращения объекта, радиусом вращения и частотой вращения. В связи с этим, для сглаживания мгновенных значений полученных параметров и их прогнозирования в случае пропадания координат используется фильтр Калмана [4,5], работающий в режиме прогноза, порядок которого выбирается в соответствии предполагаемой динамикой объекта. С выхода фильтра Калмана получаем значения:

$$\hat{x}_c(t), \hat{y}_c(t), \hat{\omega}(t), \hat{R}(t).$$

В случае пропадания входных координат, восстановление траектории источника происходит по:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \hat{x}_c(t) + \hat{R}(t) \cos \left( \theta(t_0) + \int_{t_0}^t \hat{\omega}(t) dt \right) \\ \hat{y}(t) &= \hat{y}_c(t) + \hat{R}(t) \sin \left( \theta(t_0) + \int_{t_0}^t \hat{\omega}(t) dt \right) \end{aligned}$$

где:  $t_0$  – момент пропадания источника;  $\theta(t_0)$  – текущая фаза вращения в момент пропадания источника.

Аналогичные рассуждения проводится и для первого варианта при аппроксимации  $P_2(t)$ . Необходимо лишь учесть, что временная задержка  $\tau_a$  будет состоять из двух составляющих, поскольку проводится двойная аппроксимация траектории.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Преимуществом изложенного подхода к траекторной обработке по сравнению с алгоритмами, построенными с использованием системы следящей ФАПЧ, является более быстрое определение параметров траектории в условиях зашумленности входных данных и частичного их пропадания, в то время как следящие ФАПЧ требуют значительного времени захвата. Данный алгоритм применим при реализации на в оптико-электронных системах построенных на фотоприемниках изображения матричного типа, выдающие последовательность изображений. Описанный алгоритм был реализован в экспериментальном образце оптико-электронной системы слежения и управления вращающимся объектом и показал свою работоспособность [6].

#### 5. БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Понятский В.М., Карамов С.В. Интеллектуальная система формирования строка в видеокадре при слежении за вращающимся источником полезного излучения. // Материалы межрегиональной научно-технической конференции «Интеллектуальные и информационные системы» г. Тула, 14–15 декабря 2004 г. С. 53-56.
- [2] Карамов С.В. Вопросы построения малогабаритных переносных оптико-электронных систем с фотоприемниками матричного типа. // Материалы XXXII международной конференции «Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе» (IT+SE'2005, майская сессия).– Украина, Крым, Ялта-Гузуф, 20-30 мая, 2005. – С. 32-33.
- [3] Вержбицкий В.М. Основы численных методов. –М.: Высш.шк., 2002. – 840 с
- [4] Понятский В.М., Карамов С.В. Траекторное сопровождение вращающегося источника по видеоизображениям // XLI Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии. Тезисы докладов. Физические секции. - М.: Изд-во РУДН, 2005. С. 108-109.
- [5] Понятский В.М., Карамов С.В. Фазовая автоподстройка по видеоизображениям подвижного вращающегося источника излучения // XLII Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии. Тезисы докладов. Физические секции. –М.: Изд-во РУДН, 2006. С. 43.
- [6] Карамов С.В., Тикменов В.Н. Построение вычислительной аппаратуры для малогабаритной оптико-электронной системы слежения и управления высокоскоростными объектами // 8-я Международная конференция и выставка «Цифровая обработка сигналов и ее применение» г. Москва, 29–31 марта 2006г. Т.2, С. 558-560

#### Об авторах

Сергей Вадимович Карамов – аспирант, начальник отдела ЗАО «Научно-технический центр ЭЛИНС». Адрес: Россия, 124460, Зеленоград, Панфиловский проспект, д.4, стр.1  
Телефон: +(495)5320151  
E-mail: [sergkar@mail.ru](mailto:sergkar@mail.ru)

### Estimation of parameters and prediction of movement of a rotating object having a trochoidal trajectory under the video image

#### Abstract

In article are considered a method of definition of parameters of a trajectory of the moving and rotating object having a source of radiation, on sequence of the video image. On a plane similar trajectories come nearer to trochoidal. The analysis received trochoidal trajectories both idealized, and noisy, and also in conditions of absence of a part of the measured coordinates is miss. The algorithm of definition of parameters of trajectories of similar objects providing smoothing of coordinates, and also their prediction in time is offered at loss of the image of a source of radiation.

**Keywords:** trochoidal trajectories, rotating object, smoothing of coordinates, prediction of coordinates..

#### About the author(s)

Sergey Vadimovich Karamov is a postgraduate student, head of department at Closed Joint Stock Company “The Scientific and Technical Center ELINS”. His contact email is [sergkar@mail.ru](mailto:sergkar@mail.ru).