

Об оптимальном выделении субполосных компонент изображений

Андрей Черноморец

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия
chernomorets@bsu.edu.ru

Аннотация

Рассматривается задача оптимальной субполосной фильтрации изображений в применении к проблеме удаления узкополосного шума на изображениях. Предложено решение оптимизационной задачи фильтрации на основе кронекеровского произведения субполосных матриц. Показано преимущество данного подхода по сравнению с известными методами.

Ключевые слова: изображение, оптимальная фильтрация, подобласть пространственных частот, оптимальные субполосные компоненты

In this article we consider the task of optimal subband images filtering in application to a problem of deleting narrow-band noise on images. The solution of the optimization task of filtering on the basis of kroneker product of subband matrixes is proposed. Advantage of this approach in comparison with known methods is shown.

Keywords: image, optimal filtering, subarea of spatial frequencies, optimal subband components

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из существенных проблем, возникающих при регистрации и передаче изображений в телекоммуникационных каналах связи, является наличие различного рода помех, вызванных работой аппаратуры. Во многих случаях помехи на изображении имеют узкополосный характер, для удаления которых разработано значительное количество методов фильтрации, однако при их реализации, в большинстве случаев, возникает проблема нежелательного удаления информации об объектах на изображении [1 – 2]. В связи с этим возникает задача разработки методов фильтрации, которые позволяют вносить минимальные искажения в оригинальное изображение после удаления узкополосных шумов.

Важным представляется подход к фильтрации изображений, основанный на вычислении оптимальных значений их отдельных характеристик в области пространственных частот (ПЧ), в первую очередь, энергетических. Для удаления помех на изображении в работе [3] предложен метод оптимальной субполосной фильтрации, исследованию путей компьютерной реализации которого посвящена данная работа. Теоретической основой метода оптимальной субполосной фильтрации являются положения субполосного анализа и синтеза [4 – 5] изображений, базирующиеся на учете энергетических характеристик изображений в отдельных подобластях пространственных частот (ППЧ) V_{sr} , $s = 1, 2, \dots, S$, $v = 1, 2, \dots, R$, вида,

$$V_{sr} = \{ (x, y) | (x \in D_s) \cap (y \in G_r) \}, \quad s = 1, 2, \dots, S, \quad v = 1, 2, \dots, R, \quad (1)$$

$$D_s = \{ x | x \in [-u_{s2}, -u_{s1}] \cup [u_{s1}, u_{s2}] \}, \quad G_r = \{ y | y \in [-v_{r2}, -v_{r1}] \cup [v_{r1}, v_{r2}] \},$$

$$u_{11} = 0, \quad u_{s2} = \pi; \quad v_{11} = 0, \quad v_{r2} = \pi,$$

$$u_{s+1,1} = u_{s2}; \quad v_{r+1,1} = v_{r2}, \quad 0 \leq u_{s1} < u_{s2} < \pi; \quad 0 \leq v_{r1} < v_{r2} < \pi,$$

где x, y – пространственные частоты (ПЧ).

В процессе субполосного анализа-синтеза изображение Φ представлено матрицей $\Phi = \{f_{ik}\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots, M$, значений яркости изображения в соответствующих пикселях.

2. ОПТИМАЛЬНАЯ СУБПОЛОСНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Постановке задачи оптимальной субполосной фильтрации изображений в выбранной ППЧ вида (1) соответствует задача [3, 6] выделения аддитивной субполосной компоненты $Y = (y_{ik})$, $i = 1, 2, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots, M$, изображения Φ на основе оптимизации функционала следующего вида

$$W_{sr}(Y, \gamma) = (1 - \gamma) \iint_{(u,v) \in V_{sr}} |F^\Phi(u, v) - F^Y(u, v)|^2 dudv / 4\pi^2 + \gamma \iint_{(u,v) \in V_{sr}} |F^Y(u, v)|^2 dudv / 4\pi^2, \quad (2)$$

где $F^\Phi(x, y)$, $F^Y(x, y)$ – трансформанты Фурье изображений Φ и Y ; γ определяет весомость соответствующих интегралов, причем предполагается выполнение неравенства

$$0 < \gamma < 1. \quad (3)$$

Естественным принципом оптимизации является следующее вариационное условие:

$$W_{sr}(Y, \gamma) = \min, \quad (4)$$

где минимум ищется по всем изображениям Y размерности $(M \times N)$ в предположении, что параметр γ является постоянной величиной.

В работе [3] показано, что субполосная компонента $Y = (y_{ik})$ изображения $\Phi = (f_{ik})$, $i = 1, 2, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots, M$, соответствующая ППЧ V_{sr} вида (1) и удовлетворяющая оптимизационной задаче (2) – (4) определяется соотношением

$$(\gamma I + (1 - 2\gamma)C^{sr})\bar{w} = (1 - \gamma)C^{sr}\bar{v}, \quad (5)$$

где матрица C^{sr} – кронекеровское произведение

$$C^{sr} = A_s \otimes B_r, \quad (6)$$

субполосных матриц A_s и B_r ($A_s = \{a_{in}^s\}$, $i, n = 1, \dots, N$, $B_r = \{b_{km}^r\}$, $k, m = 1, \dots, M$), соответствующих заданной ППЧ V_{sr} , с элементами вида:

$$a_{in}^s = \int_{x \in D_s} \exp(-jx(i-n))dx / 2\pi; \quad b_{km}^r = \int_{y \in G_r} \exp(-jy(k-m))dy / 2\pi, \quad (7)$$

$\bar{w} = (w_1, \dots, w_{N \cdot M})^T$, $\bar{v} = (v_1, \dots, v_{N \cdot M})^T$ – векторы, компоненты которых формируются на основе строк матриц Y и Φ следующим образом:

$$w_{(i-1) \cdot M + k} = y_{ik}, \quad v_{(i-1) \cdot M + k} = f_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (8)$$

I – единичная матрица соответствующей размерности.

Можно показать, что матрица

$$\Gamma^{sr} = \gamma I + (1 - 2\gamma)C^{sr} \quad (9)$$

является неособенной, следовательно, обратная матрица $(\Gamma^{sr})^{-1}$ существует и решение (5) оптимизационной задачи (2) – (4) относительно вектора \bar{w} имеет вид:

$$\bar{w} = (1 - \gamma)(\gamma I + (1 - 2\gamma)C^{sr})^{-1} C^{sr} \bar{v}. \quad (10)$$

Непосредственная реализация соотношения (10) требует применения алгоритмов обращения матриц больших размерностей, что приводит к существенным вычислительным затратам.

3. КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НА ОСНОВЕ СВОЙСТВ СУБПОЛОСНЫХ МАТРИЦ

В данной работе предложена компьютерная реализация соотношения (10), основанная на использовании свойств субполосных матриц, что позволяет существенно снизить вычислительную сложность метода оптимальной субполосной фильтрации изображений.

Так, можно показать, что матрица C^{sr} является симметрической. Следовательно, справедливо следующее представление:

$$C^{sr} = X^{sr} M^{sr} (X^{sr})^T, \quad (11)$$

где $M^{sr} = \text{diag}(\mu_1^{sr}, \mu_2^{sr}, \dots, \mu_{NM}^{sr})$ – диагональная матрица собственных чисел матрицы C^{sr} , $X^{sr} = (\bar{x}_1^{sr} \dots \bar{x}_{(i-1)M+k}^{sr} \dots \bar{x}_{NM}^{sr})$ – матрица, столбцы которой образованы соответствующими собственными векторами $\bar{x}_1^{sr}, \bar{x}_2^{sr}, \dots, \bar{x}_{NM}^{sr}$ данной матрицы.

Также можно показать, что

$$(\Gamma^{sr})^{-1} = X^{sr} (N^{sr})^{-1} (X^{sr})^T, \quad (12)$$

где N^{sr} – диагональная матрица, образованная на основе множества собственных чисел матрицы Γ^{sr} вида,

$$\eta_n = \gamma + (1 - 2\gamma)\mu_n^{sr}, \quad n = 1, 2, \dots, MN. \quad (13)$$

Подставив соотношения (9), (11), (12) и (13) в выражение (10) и учитывая ортогональность собственных векторов матрицы C^{sr} , получим:

$$\bar{w} = (1 - \gamma)X^{sr} Z^{sr} (X^{sr})^T \bar{v}, \quad (14)$$

где матрица Z^{sr} – диагональная матрица, размерности $NM \times NM$, $Z^{sr} = \text{diag}(z_1^{sr}, \dots, z_n^{sr}, \dots, z_{NM}^{sr})$, с элементами вида

$$z_n^{sr} = \frac{\mu_n^{sr}}{\gamma + (1 - 2\gamma)\mu_n^{sr}}, \quad n = 1, 2, \dots, NM. \quad (15)$$

Следовательно, при компьютерной реализации рассматриваемого метода соотношение для вычисления отдельного элемента w_m вектора \bar{w} имеет вид:

$$w_m = (1 - \gamma) \sum_{n=1}^{NM} v_n \sum_{p=1}^{NM} x_{m,p}^{sr} z_p^{sr} x_{n,p}^{sr}, \quad m = 1, 2, \dots, NM. \quad (16)$$

где

$$z_{(i-1)M+k}^{sr} = \frac{\lambda_i^s \lambda_k^r}{\gamma + (1 - 2\gamma)\lambda_i^s \lambda_k^r}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (17)$$

$$x_{(j-1)M+l, (i-1)M+k}^{sr} = q_{ji}^s q_{lk}^r, \quad j, i = 1, 2, \dots, N, \quad l, k = 1, 2, \dots, M,$$

q_{ji}^s – j -й элемент собственного вектора \bar{q}_i^s , $i = 1, 2, \dots, N$, матрицы A_s и q_{lk}^r – l -й элемент собственного вектора \bar{q}_k^r , $k = 1, 2, \dots, M$, матрицы B_r .

В выражении (16) можно существенно уменьшить объем вычислений, если использовать только значения z_p^{sr} , соответствующие ненулевым собственным числам матрицы кронекеровского произведения C^{sr} ,

$$\mu_{(i-1)J_s+k}^{sr} = \lambda_i^s \lambda_k^r, \quad i = 1, \dots, J_s, \quad k = 1, \dots, J_r, \quad \lambda_i^s > \varepsilon, \quad \lambda_k^r > \varepsilon, \quad (18)$$

где J_s и J_r – количество ненулевых собственных чисел соответствующих субполосных матриц A_s и B_r ; ε – малое положительное число.

Тогда, если ввести обозначения: Z_1^{sr} – диагональная матрица, составленная из значений вида (15), (18), соответствующих ненулевым собственным числам субполосных матриц A_s и B_r ; X_1^{sr} – матрица, составленная из собственных векторов матрицы кронекеровского произведения C^{sr} , соответствующих ненулевым собственным числам вида (15), (18), то соотношение

$$\bar{w} \approx (1 - \gamma)X_1^{sr} Z_1^{sr} (X_1^{sr})^T \bar{v} \quad (19)$$

следует применять для практической реализации метода оптимальной субполосной фильтрации изображений (решение оптимизационной задачи (2) – (4)), не выполняя обращения возникающих при этом матриц большой размерности. Значения элементов оптимальной субполосной компоненты $Y = (y_{ik})$ изображения $\Phi = (f_{ik})$, $i = 1, 2, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots, M$, соответствующей ППЧ V_{sr} , вычисляются на основе следующего соотношения:

$$y_{ik} = w_{(i-1)M+k}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (20)$$

Использование матричных вычислений в среде Matlab позволяет получать решение на основе соотношения (19) за приемлемое время, при этом существенное снижение требуемого объема оперативной памяти достигается путем реализации соотношения (19) в виде

$$\bar{w} \approx (1 - \gamma)(X_1^{sr} Z_1^{sr})(X_1^{sr})^T \bar{v}. \quad (21)$$

Эффективность применения метода оптимальной субполосной фильтрации изображений для удаления узкополосных шумов объясняется тем, что субполосные компоненты, получаемые на основе соотношений (16), (19) и (20), имеют важное свойство – отсутствие влияния на данные компоненты энергии исходного изображения из смежных подобластей пространственных частот, что обеспечивает высокое качество фильтрации узкополосных помех, и подтверждено многочисленными вычислительными экспериментами с реальными изображениями и наложенным на них аддитивным шумом.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

При проведении вычислительных экспериментов для сравнения результатов применения различных методов фильтрации было использовано изображение аэропорта, приведенное на рис. 1, а, являющееся результатом наложения на исходное изображение земной поверхности, размерностью

128x128 пикселей, узкополосного модельного шума, сгенерированного на основе соотношения

$$f_{ik}^{noise} = \sin(0.11 \cdot 2\pi k), \quad i, k = 1, 2, \dots, 128,$$

и затем преобразованного таким образом, чтобы уровень шум/сигнал имел значение 0.6.

На рис. 1, б отображены величины абсолютных значений трансформант Фурье исходного изображения, заданного аддитивного шума и зашумленного изображения, соответствующие выбранной подобласти ПЧ D_0 ,

$$D_0 = \{(u = 0.299\pi) \cap (v \in [0.05\pi, 0.2\pi])\}. \quad (22)$$

Размеры подобласти D_0 выбраны для отображения результатов в соответствии с распределением энергии шума – основная часть энергии шума сосредоточена в ППЧ V_0 ,

$$V_0 = \{(u \in [0, \pi]) \cap (v \in [0.095\pi, 0.125\pi])\}. \quad (23)$$

В ходе вычислительного эксперимента была выделена при значении $\gamma = 0.5$ оптимальная субполосная компонента вида (19) – (20), соответствующая ППЧ V_0 (23), а также были вычислены результаты КИХ-фильтрации (длина импульсной характеристики – 512, ширина переходной полосы $c = 0,005\pi$) в той же подобласти ПЧ. Величины, соответствующие подобласти ПЧ D_0 , абсолютных значений трансформант Фурье зашумленного изображения, выделенной субполосной компоненты и результата КИХ-фильтрации приведены на рис. 2, а.

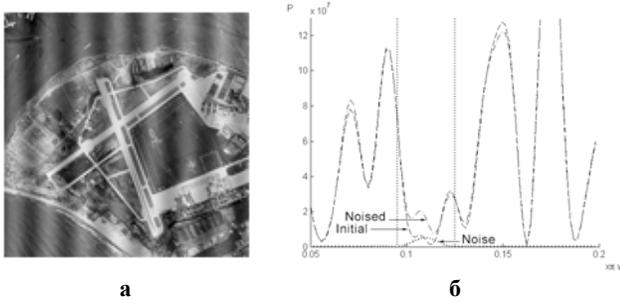


Рис. 1. Зашумленное изображение земной поверхности: а – зашумленное изображение, б – абсолютные значения трансформант Фурье шума, исходного и зашумленного изображений

На основе полученных результатов была выполнена режекторная фильтрация шума. Результаты режекторной фильтрации на основе выделения оптимальной субполосной компоненты и КИХ-фильтрации в подобласти V_0 приведены на рис. 2, в и 2, г. На рис. 2, в (результат субполосной фильтрации) полос, вызванных наличием шума, значительно меньше, чем на рис. 2, г (результат КИХ-фильтрации).

На рис. 2, б отображены абсолютные значения трансформант Фурье исходного изображения и результатов, представленных на рис. 2, в и 2, г.

На рис. 2, а видно, что на трансформанту Фурье результата КИХ-фильтрации оказывает существенное влияние увеличение энергии в смежных с V_0 (слева и справа) подобластях ПЧ. При этом значения трансформанты Фурье выделенной оптимальной субполосной компоненты снижаются за пределами области V_0 .

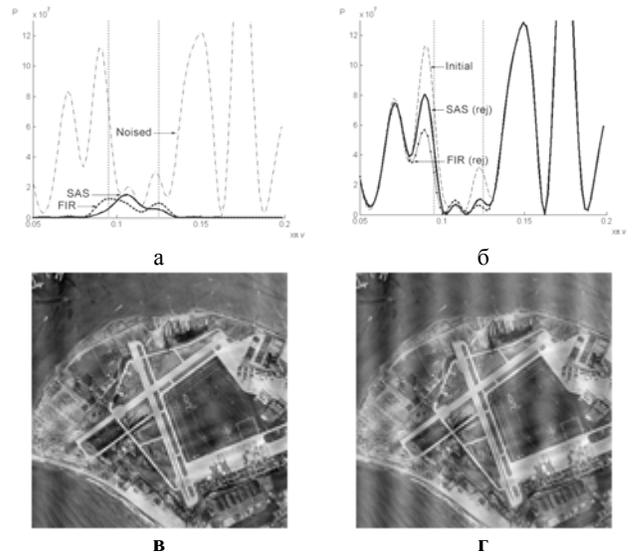


Рис. 2. Результаты фильтрации при $\gamma = 0.5, c = 0,005\pi$: а – абсолютные значения трансформант Фурье зашумленного изображения и результатов субполосной (SAS) и КИХ-фильтрации (FIR); б – абсолютные значения трансформант Фурье исходного изображения и результатов режекторной фильтрации; в – результат режекторной субполосной фильтрации; г – результат режекторной КИХ-фильтрации

Приведенные на рис. 2, б графики демонстрируют, что при применении оптимальной субполосной фильтрации трансформанта Фурье результата режекторной субполосной фильтрации менее отличается вне области фильтрации от трансформанта Фурье исходного изображения, чем трансформанта Фурье результата режекторной КИХ-фильтрации.

СКО в пространственной области результатов режекторной фильтрации относительно исходного изображения – 0.277 и 0.53, соответственно, при применении субполосных компонент и КИХ-фильтрации.

Визуально отличие в погрешности можно наблюдать на рис. 2, в и 2, г – метод субполосной фильтрации позволил удалить шум визуально значительно лучше, чем при использовании КИХ-фильтров.

Аналогичные расчеты результатов фильтрации в подобласти V_0 (рис. 3) были выполнены для выделения оптимальной субполосной компоненты при $\gamma = 0.8$ и при использовании КИХ-фильтра, длина импульсной характеристики которого равна 512 и ширина переходной полосы $c = 0,0005\pi$.

Результаты режекторной фильтрации, представленные на рис. 3, в и 3, г, визуально практически не различаются, однако СКО первого изображения несколько лучше, чем у второго изображения (0.261 и 0.283, соответственно).

Изображения, приведенные на рис. 2 и 3, демонстрируют преимущество применения субполосной фильтрации по сравнению с КИХ-фильтрами.

В ходе эксперимента также были получены результаты режекторной фильтрации в ППЧ V_0 на основе идеального фильтра и фильтра Гаусса (см. таблицу, где ОСФ – оптимальная субполосная фильтрация).

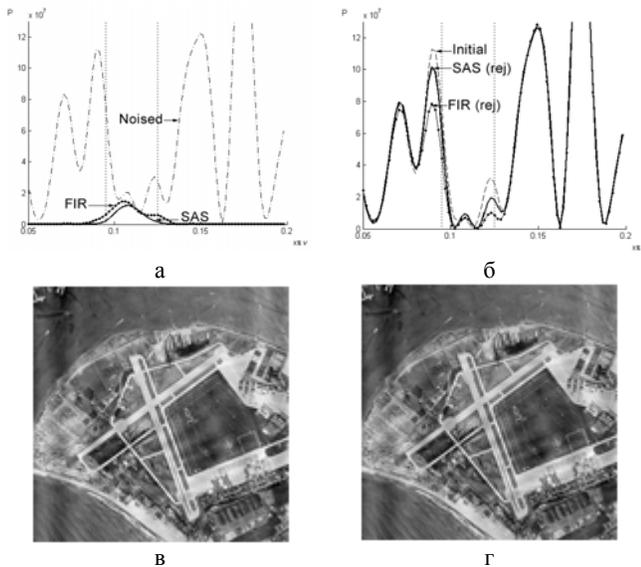


Рис. 3. Результаты фильтрации при $\gamma = 0.8$, $\epsilon = 0.0005\pi$: а – абсолютные значения трансформант Фурье зашумленного изображения и результатов субполосной (SAS) и КИХ-фильтрации (FIR); б – абсолютные значения трансформант Фурье исходного изображения и результатов режекторной; в – результат режекторной субполосной фильтрации; г – результат режекторной КИХ-фильтрации

Результаты фильтрации

	Доля энергии вне V_0	Режекторная фильтрация		
		СКО в D_0	СКО	PSNR
ОСФ, $\gamma=0.1$	0.091	0.309	0.303	25.371
ОСФ, $\gamma=0.2$	0.068	0.250	0.292	25.695
ОСФ, $\gamma=0.3$	0.055	0.203	0.286	25.882
ОСФ, $\gamma=0.4$	0.047	0.166	0.281	26.029
ОСФ, $\gamma=0.5$	0.041	0.135	0.277	26.176
ОСФ, $\gamma=0.6$	0.036	0.109	0.271	26.338
ОСФ, $\gamma=0.7$	0.032	0.087	0.266	26.517
ОСФ, $\gamma=0.8$	0.028	0.068	0.261	26.682
ОСФ, $\gamma=0.9$	0.025	0.05	0.264	26.579
КИХ, $\epsilon = 0.005$	0.143	0.21	0.53	20.527
КИХ, $\epsilon = 0.0005$	0.043	0.141	0.283	25.977
Идеальный	0.149	0.382	0.332	24.597
Гаусса	0.112	0.327	0.254	26.926

В таблице представлены значения доли энергии [4] результатов фильтрации, полученных указанными в таблице методами, вне подобласти фильтрации V_0 , а также величины СКО и PSNR результатов режекторной фильтрации относительно исходного изображения и СКО абсолютных значений трансформант Фурье (в подобласти D_0) результатов режекторной фильтрации относительно абсолютных значений трансформанты Фурье исходного изображения.

В ходе вычислительных экспериментов (см. таблицу) наименьшая погрешность в пространственной области после удаления шума на изображении была получена при применении метода оптимальной субполосной фильтрации ($\gamma=0.8$).

5. ВЫВОДЫ

В настоящей работе разработаны подходы к практической реализации на вычислительной технике метода оптимальной субполосной фильтрации изображений в заданных подобластях пространственных частот, обеспечивающего вычисление субполосных компонент, на которые не оказывает влияние энергия изображения из смежных подобластей. Полученные в ходе приведенных вычислительных экспериментов результаты демонстрируют преимущество применения оптимальных субполосных компонент в процессе фильтрации узкополосных помех по сравнению с использованием известных фильтров,

6. ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Работа выполнена в рамках Государственного задания НИУ «БелГУ» на 2014 год (код проекта № 358).

7. ССЫЛКИ

- [1] Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений [Текст] / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М.: Техносфера, 2012. – 1104 с.
- [2] Методы компьютерной обработки изображений [Текст]; под редакцией В.А. Соифера. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 784 с.
- [3] Жилияков, Е.Г. О субполосном анализе изображений [Текст] / Е.Г. Жилияков, А.А. Черноморец // ГрафиКон'2013: 23-я Международная конференция по компьютерной графике и зрению: 16 – 20 сентября, 2013 г. Владивосток, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН: Труды конференции. – С. 230 - 233.
- [4] Жилияков, Е.Г. Об эффективности метода оценивания значений долей энергии изображений на основе частотных представлений [Текст] / Е.Г. Жилияков, А.А. Черноморец, А.Н. Заливин // Известия ОрелГТУ. Информационные системы и технологии. – № 2/52 (563) март-апрель. – 2009. – С. 12 - 22.
- [5] Жилияков, Е.Г. О частотном анализе изображений [Текст] / Е.Г. Жилияков, А.А. Черноморец // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. – 2010. – Вып. 1. – С. 94 - 103.
- [6] Жилияков, Е.Г. Об оптимальном выделении субполосных компонент изображений [Текст] / Е.Г. Жилияков, А.А. Черноморец // Информационные системы и технологии. – № 1 (75). – 2013. – С. 5 - 11.

Информация об авторах

Черноморец Андрей – к. т. н., доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет.

e-mail: chernomorets@bsu.edu.ru